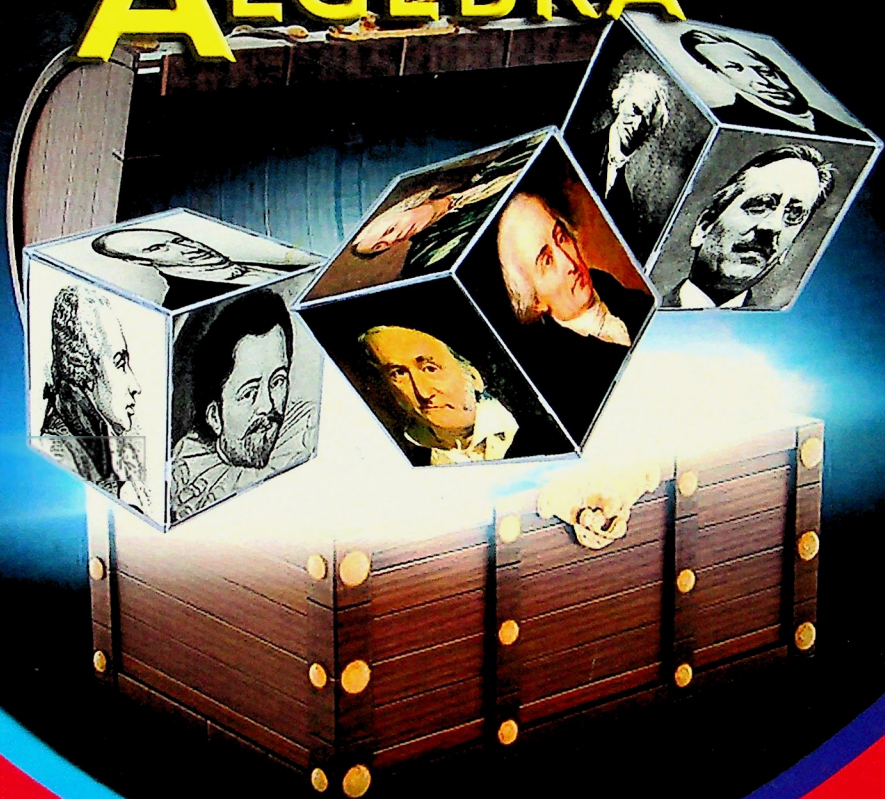


OS SEGREDOS DA ÁLGEBRA



Miller Dias

Miller Dias de Araújo

Os Segredos da Álgebra
para IME ITA Olimpíadas

Editora Vestseller
FORTALEZA – CE
1ª Edição Julho/2018

Apresentação

Escrever um livro não é só expor nele a matéria e resolver as questões selecionadas.

É, antes, relacionar conteúdos, conjugando didaticamente ideias e métodos eficazes ao longo da obra. Trata-se de um trabalho árduo, pois são vários os aspectos (muitas vezes sobrepostos) a abordar, e somente quem é autor sabe a dificuldade de levar tudo isso a um bom termo.

Por outro lado, a escrita deste livro ofereceu-me novas experiências e oportunidades de amadurecimento tanto como professor quanto como autor. Além disso, o fato de haver poucos, talvez pouquíssimos, livros hoje no mercado que detalham os assuntos de que trato aqui fez com que minha motivação fosse ainda maior.

Nos oito primeiros capítulos, exponho toda a teoria, de forma detalhada e demonstrada. Trato do assunto e, após fazê-lo, trago exemplos resolvidos para facilitar a compreensão. Na sequência, há uma bateria de exercícios para o leitor praticar os assuntos e fixar o que aprendeu.

Você verá que a maioria das questões tem mais de uma resolução, e algumas delas foram repetidas em capítulos diferentes. Isso se dá para que você possa, se quiser, resolvê-las com o assunto daquele novo capítulo, aumente sua visão geral dos conteúdos e afie ainda mais seu raciocínio para utilizar em exercícios futuros.

Nos dois últimos capítulos, concentrei os gabaritos, as sugestões e as resoluções, para que o leitor possa conferir suas próprias respostas e, possivelmente, aprender ideias novas também a partir das resoluções.

Miller Dias De Araújo

Prefácio

No século XVIII, o matemático francês Jean Le Rond D'Alembert afirmou "A álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu". D'Alembert, que possui importantes descobertas na álgebra, como o Teorema Fundamental da Álgebra, não poderia ter sido mais feliz em sua célebre frase. A álgebra é a ferramenta mestra para o desenvolvimento de todas as ciências naturais. O que seria da física sem a álgebra? O que seria das outras áreas da matemática sem a álgebra?

No nosso país, de forma geral, as pessoas menosprezam a importância da matemática em suas vidas. Mal sabem essas pessoas o quanto elas seriam mais felizes se soubessem, por exemplo, calcular o consumo mensal de cada aparelho eletrônico de sua residência ou calcular o consumo de combustível de seu automóvel em faixas diferentes de velocidade. Para tanto, bastaria que tivessem uma base mais sólida de álgebra e aritmética. E essa base mais sólida em matemática aprende-se com bons professores e com bons livros.

No âmbito dos concursos militares e olimpíadas científicas, uma base sólida em matemática não é uma opção, é uma obrigação. Há um detalhe importante sobre o ensino dos primeiros conceitos de álgebra: eles são abordados no ensino fundamental, momento em que não há espaço para aprofundamentos, fazendo com que os livros apresentem a álgebra de maneira superficial. Nos vestibulares tradicionais (ENEM e vestibulares de universidades federais, estaduais e particulares), não há uma exigência muito grande quanto à álgebra. Porém, nos concursos militares e olimpíadas de matemática, a álgebra é exigida em um nível muito alto, sendo necessário um estudo mais aprofundado.

De modo a auxiliar nesse aprofundamento, a obra "Os Segredos da Álgebra Para IME/ITA/VOLÍMPIADAS", do eminente autor Miller Dias De Araújo, é perfeita. Todos os tópicos da álgebra fundamental estão presentes, incluindo potenciação, radiciação, produtos notáveis e fatoração. Em cada capítulo, a teoria algébrica é apresentada de forma detalhada, seguida de muitos problemas resolvidos. Várias identidades algébricas são demonstradas, algumas pouco conhecidas. Certamente, a cereja do bolo são os exercícios propostos, em grande quantidade e de excelente qualidade, a maioria retirada de concursos militares e olimpíadas de matemática de todo o mundo. Você vai se deparar com exercícios do Colégio Naval, ITA, IME e também de olimpíadas de diversos países. Deve-se destacar a organização dos capítulos, nos quais

os conceitos mais fundamentais são apresentados primeiro, para somente depois constarem os tópicos mais avançados, facilitando o entendimento do leitor. O último capítulo do livro é reservado para as soluções e dicas dos exercícios propostos.

A presente obra é um verdadeiro tesouro, indispensável para qualquer pessoa que deseja formar uma base sólida em álgebra. Recomendo ao leitor que resolva esse livro de capa a capa, prestando atenção nas nuances de cada passagem algébrica. Existe muita poesia, arte e magia nessa obra prima do Miller Dias. Parabéns ao grande mestre!

Tenho que admitir que, durante a leitura do livro, me perguntei o quanto minha vida de concurseiro militar teria sido mais fácil se eu tivesse, à época, um livro de tão alto nível para ajudar minha base algébrica. Certamente esta obra de Miller Dias De Araújo será uma importante ferramenta para todos formarem uma base mais sólida em álgebra.

Marcelo Rufino de Oliveira

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e me incentivaram em todas as minhas caminhadas.

A meus amigos, em especial Thaís Pereira Soares e Johnatan Bruno, pelo apoio, motivação e incentivo; Meus professores, que ensinaram-me com muita dedicação.

Ao professor Renato Brito, pelas críticas e sugestões.

Ao professor Marcelo Rufino pela escrita do prefácio.

Ao professor Cláudio Neves pelas revisões.

Ao professor Luiz Vieira dos Santos, pelos ensinamentos, pela paciência e por ter-me iniciado no caminho da Matemática IME ITA.

Sumário

Capítulo 01: Potenciação

1.1) Definição.....	11
1.2) Produto de Potências de Mesma Base.....	11
1.3) Divisão de Potências de Mesma Base.....	12
1.4) Potência Elevada à Potência.....	13
1.5) Produto Elevado à Mesma Potência.....	13
1.6) Potência Elevada à Potência, n vezes	17
1.7) Potência de Ordem Superior.....	17
1.8) Potência com Expoente em PG.....	21
1.9) Potência com Expoente Negativo.....	26
1.10) Divisão Composta.....	26
1.11) Potência com Expoente Fracionário.....	27

Capítulo 02: Radiciação

2.1) Definição.....	31
2.2) Produto de Radicais de Mesmo Índice.....	32
2.3) Divisão de Radicais de Mesmo Índice.....	33
2.4) Raiz de uma Raiz.....	36
2.5) Produto de Radicais de Índices Diferentes.....	43
2.6) Raiz de Fração Composta.....	45
2.7) Séries Finitas de Radicais.....	52
2.8) Séries Infinitas de Radicais.....	61
2.9) Divisão Composta Infinita.....	81
2.10) Radicais em Cadeia Infinita.....	84
2.11) Operações com Radicais.....	90

Capítulo 03: Racionalização

3.1) Quocientes Notáveis.....	93
3.2) Fator Racionalizante.....	94
3.3) Radicais Duplos.....	105
3.4) Tópicos Avançados em Radicais Duplos.....	124

Capítulo 04: Expressões Algébricas

4.1) Tipos de Expressões Algébricas.....	125
4.2) Valor Numérico.....	126
4.3) Operações com Expressões Algébricas.....	127

Capítulo 05: Produtos Notáveis

5.1) Quadrado da Soma de Dois Termos.....	130
5.2) Quadrado da Diferença Entre Dois Termos.....	131
5.3) Identidade de Legendre para a Soma.....	132
5.4) Identidade de Legendre para a Diferença.....	133
5.5) Identidade de Lagrange para a Soma.....	133
5.6) Identidade de Lagrange para a Diferença.....	134
5.7) Produto da Soma pela Diferença.....	140
5.8) Identidades de Stevin.....	142
5.9) Cubo da Soma de Dois Termos.....	149
5.10) Cubo da Diferença de Dois Termos.....	149
5.11) Identidade de Cauchy.....	152
5.12) Quarta Potência da Soma e da Diferença.....	157
5.13) Identidades de Legendre.....	158
5.14) Quinta Potência da Soma.....	160
5.15) Quinta Potência da Diferença.....	161
5.16) Identidades para Termos Recíprocos.....	165
5.17) Quadrado da Soma de Três Termos.....	173
5.18) Identidade de Lagrange Para Três Termos.....	175
5.19) Produto Dois a Dois Elevado ao Quadrado.....	176
5.20) Identidades de Argand.....	181
5.21) Quadrado da Soma de Quatro Termos.....	182
5.22) Cubo da Soma de Três Termos.....	183
5.23) Identidade de Gauss.....	185
5.24) Soma de Quatro Termos Elevado ao Cubo.....	186
5.25) Quarta Potência de Três Termos.....	187
5.26) Identidades de Stevin para Três Termos.....	189
5.27) Identidade de Sophie-Germain.....	191
5.28) Identidade de Chrystal.....	194
5.29) Identidades Condicionais.....	199
5.30) Tópicos Avançados em Produtos Notáveis.....	211

Capítulo 06: Fatoração

6.1) Critérios de Fatoração.....	213
6.2) Agrupamento ou "evidência".....	213
6.3) Quocientes Notáveis.....	214
6.4) Completando o Produto Notável.....	216
6.5) Cruzadinha Simples.....	226
6.6) Teorema do Fator ou das Raízes Racionais.....	230
6.7) Fatorando Polinômios do 3º Grau.....	231
6.8) Cruzadinha Dupla.....	234
6.9) Cruzadinha Dupla Especial.....	238
6.10) Fatorando Polinômios do 5º Grau.....	243

6.11) Cruzadinha Tripla.....	246
6.12) Tópicos Avançados em Fatoração.....	256

Capítulo 07: Polinômios Simétricos

7.1) Forma de um Polinômio Simétrico.....	259
7.2) Propriedades dos Polinômios Simétricos.....	260
7.3) Fatoração por Polinômio Simétrico.....	261
7.4) Polinômio Alternado.....	263
7.5) Propriedades dos Polinômios Alternados.....	264
7.6) Fatoração por Polinômio Alternado.....	265

Capítulo 08: Somas de Newton

8.1) Somas de Newton para Dois Termos.....	272
8.2) A Notação Sigma.....	274
8.3) Somas de Newton para Três Termos.....	276
8.4) Generalização para um Polinômio de Grau n	280

Capítulo 09: Respostas e Sugestões

Capítulo 10: Resoluções

Bibliografia

Capítulo 01 - Potenciação

Introdução

A determinação da potência de um número é feita pela multiplicação de fatores iguais. O expoente possui um papel fundamental na potenciação, pois ele é quem define quantas vezes a base será multiplicada por ela mesma. Vejamos como trabalhar com essa ferramenta importantíssima na resolução de problemas.

1.1) Definição:

Dado um número real "a" qualquer, tomemos n como um número natural. O produto de n fatores "a" é igual à enésima potência de "a".

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{"n" vezes} \\ a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n \end{array}}; \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{R}.$$

Consequências da definição:

a) $\boxed{a^0 = 1}$; $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, \infty\}$.

c) $\boxed{0^a = 0}$; $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, \infty\}$.

b) $\boxed{a^1 = a}$; $\forall a \in \mathbb{R}$.

d) $\boxed{1^a = 1}$; $\forall a \in \mathbb{R} - \{\infty\}$.

Exemplos de Aplicação 01

a) $2001^0 = 1$.

d) $0^{1785} = 0$.

b) $1^0 = 1$.

e) $0^1 = 0$.

c) $\left(4096^{202}\right)^1 = 4096^{202}$.

f) $1^{1750 \cdot 234} = 1$.

1.2) Propriedades das Potências:

A seguir, veremos as propriedades mais importantes das potências. Com elas, iremos resolver vários problemas usando o mínimo de cálculo algébrico. Vamos lá!

P1. Produto de Potências de Mesma Base:

Num produto de potências de mesma base, repete-se a base e somam-se os expoentes.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Demonstração:

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{\text{"m" vezes}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{\text{"n" vezes}} \Leftrightarrow a^m \cdot a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{\text{"m+n" vezes}}$$

$$\therefore \boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}; \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{R}.$$

Exemplos Resolvidos 01

- a) $5^3 \cdot 5^{15} = 5^{3+15} \Rightarrow 5^3 \cdot 5^{15} = 5^{18}$.
- b) $81^{36} \cdot 81^{25} = a^{36+25} \Rightarrow 81^{36} \cdot 81^{25} = 81^{61}$.
- c) $m^{2p} \cdot m^{7p} = m^{2p+7p} \Rightarrow m^{2p} \cdot m^{7p} = m^{9p}$.

P2. Divisão de Potências de Mesma Base:

Numa divisão de potências de mesma base, repete-se a base e subtraem-se os expoentes.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Demonstração:

$$\frac{a^m}{a^n} = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{\text{"m" vezes}} \cdot \frac{1}{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{\text{"n" vezes}}} \Leftrightarrow \frac{a^m}{a^n} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{\text{"m-n" vezes}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}; \forall m, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \text{ e } a^n \neq 0.$$

Exemplos Resolvidos 02

- a) $\frac{3^{30}}{3^{12}} = 3^{30-12} \Rightarrow \frac{3^{30}}{3^{12}} = 3^{18}$.
- b) $\frac{2^{2016}}{2^{1008}} = 2^{2016-1008} \Rightarrow \frac{2^{2016}}{2^{1008}} = 2^{1008}$.
- c) $\frac{x^{100}}{x^{72}} = x^{100-72} \Rightarrow \frac{x^{100}}{x^{72}} = x^{28}$.

P3. Potência Elevada a Potência:

Numa potência de uma potência, repete-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Demonstração:

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{\text{"n" vezes}} \therefore (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{R}.$$

Consequência:

$$\begin{aligned} \left((a^m)^n\right)^p &= \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{\text{"n" vezes}} \cdot \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{\text{"n" vezes}} \cdot \dots \cdot \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{\text{"n" vezes}} \\ &\quad \text{"p" vezes} \\ \Leftrightarrow \left((a^m)^n\right)^p &= (a^{m \cdot n})^p \therefore \left((a^m)^n\right)^p = a^{m \cdot n \cdot p}. \end{aligned}$$

Exemplos Resolvidos 03

$$a) \quad (7^{25})^3 = 7^{25 \cdot 3} \Rightarrow (7^{25})^3 = 7^{75}.$$

$$b) \quad (p^{2q})^m = p^{2q \cdot m} \Rightarrow (p^{2q})^m = p^{2qm}.$$

$$c) \quad \left((p^{2q})^m\right)^{3n} = p^{2q \cdot m \cdot 3n} \Rightarrow \left((p^{2q})^m\right)^{3n} = p^{6qmn}.$$

P4. Produto Elevado à Mesma Potência:

Num produto elevado à potência, eleva-se cada base ao expoente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= \overbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}^{\text{"n" vezes}} \Leftrightarrow (a \cdot b)^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{\text{"n" vezes}} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{\text{"n" vezes}} \\ \therefore (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n; \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Consequências:**01) Produto de vários termos, elevado a potência:**

O produto de vários termos elevado a potência é igual ao produto de cada termo elevado a potência.

$$(a \cdot b \cdot c \dots)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \dots$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (a \cdot b \cdot c \dots)^n &= \overbrace{(a \cdot b \cdot c \dots) \cdot (a \cdot b \cdot c \dots) \cdot \dots \cdot (a \cdot b \cdot c \dots)}^{n \text{ vezes}} \\ \Leftrightarrow (a \cdot b \cdot c \dots)^n &= \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{c \cdot c \cdot \dots \cdot c}^{n \text{ vezes}} \\ \therefore (a \cdot b \cdot c \dots)^n &= a^n \cdot b^n \cdot c^n \dots \end{aligned}$$

Exemplos Resolvidos 04

$$\begin{aligned} \text{a) } (p \cdot m)^{2m \cdot x} &= (p)^{2m \cdot x} \cdot (m)^{2m \cdot x} \Rightarrow (p \cdot m)^{2m \cdot x} = p^{2m \cdot x} \cdot m^{2m \cdot x} \\ \text{b) } (a \cdot b \cdot c)^{25} &= (a)^{25} \cdot (b)^{25} \cdot (c)^{25} \Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^{25} = a^{25} \cdot b^{25} \cdot c^{25} \end{aligned}$$

02) Se as potências tiverem expoentes:

Generalizando a consequência anterior para produto de potências, tem-se:

$$(a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots)^n = a^{nx} \cdot b^{ny} \cdot c^{nz} \dots$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots)^n &= \overbrace{(a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots) \cdot (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots) \cdot \dots \cdot (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots)}^{n \text{ vezes}} \\ \Leftrightarrow (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots)^n &= \overbrace{a^x \cdot a^x \cdot \dots \cdot a^x}^{n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{b^y \cdot b^y \cdot \dots \cdot b^y}^{n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{c^z \cdot c^z \cdot \dots \cdot c^z}^{n \text{ vezes}} \\ \therefore (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots)^n &= a^{nx} \cdot b^{ny} \cdot c^{nz} \dots \end{aligned}$$

Exemplos Resolvidos 05

$$a) (p^{4q} \cdot m^{5n})^{2m} = (p^{4q})^{2m} \cdot (m^{5n})^{2m} \Rightarrow (p^{4q} \cdot m^{5n})^{2m} = p^{8q \cdot m} \cdot m^{10n \cdot m}$$

$$b) (a^x \cdot b^y \cdot c^z)^3 = (a^x)^3 \cdot (b^y)^3 \cdot (c^z)^3 \Rightarrow (a^x \cdot b^y \cdot c^z)^3 = a^{3x} \cdot b^{3y} \cdot c^{3z}$$

Problemas Propostos**Questão 1.1 (AHSME-1952)**

$$\frac{2^{n+4} - 2 \cdot (2^n)}{2 \cdot (2^{n+3})}, \text{ quando simplificado, é:}$$

a) $2^{n+1} - \frac{1}{8}$

b) -2^{n+1}

c) $1 - 2^n$

d) $\frac{7}{8}$

e) $\frac{7}{4}$

Questão 1.2

$$\text{Determine } \left(\left((2^a)^{2b} \right)^{2c} \right)^{2d}.$$

Questão 1.3

$$\text{Determine } \left(2^{2a^2} \cdot 3^{2b^2} \cdot 7^{2c^2} \right)^{m \cdot n}.$$

Questão 1.4 (AHSME-1971)

O número $2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k}$ é igual a:

a) 2^{-2k}

b) $2^{-(2k-1)}$

c) $-2^{-(2k+1)}$

d) 0

e) 2

Questão 1.5

$$\text{Simplifique } \frac{10^4 \cdot 15^{16} \cdot 33^{11} \cdot 77^{17} \cdot 84^{13}}{5^{20} \cdot 14^{30} \cdot 30^{40} \cdot 11^{28}}.$$

Questão 1.6

Simplifique $\frac{5^{n-1} + 2^{n-1}}{5^{1-n} + 2^{1-n}}$.

Questão 1.7

Simplifique $\frac{x^{n^k+2} - x^{n^k+1} + x^{n^k}}{x^{n^k-2} - x^{n^k-1} + x^{n^k}}$.

Questão 1.8

Simplifique $\overbrace{x^{n^k} + x^{n^k} + \dots + x^{n^k}}^{x^{n^k} \text{ vezes}} \cdot \overbrace{x^n + x^n + \dots + x^n}^{x^n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{x^k + x^k + \dots + x^k}^{x^k \text{ vezes}}$.

Questão 1.9

Reduza $\overbrace{a^b + a^b + \dots + a^b}^{b^a \text{ vezes}} \cdot \overbrace{b^b + b^b + \dots + b^b}^{a^a \text{ vezes}}$.

Questão 1.10

Reduza $\overbrace{a^b \cdot a^b \cdot \dots \cdot a^b}^{b^a \text{ vezes}} \cdot \overbrace{b^a \cdot b^a \cdot \dots \cdot b^a}^{a^b \text{ vezes}}$.

P5. Potência Elevada a Potência, Elevada a Potência "n" Vezes:

Numa potência elevada a potência, elevada a potência n vezes, o expoente é dado pelo produto de potência de mesma base.

$$\overbrace{\left(\left(\left(a^m \right)^m \right)^{\dots} \right)^m }^{n \text{ vezes}} = a^{m^n} ; \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

$$\overbrace{\left(\left(\left(a^m \right)^m \right)^{\dots} \right)^m }^{n \text{ vezes}} = a^{\overbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}^{n \text{ vezes}}} \therefore \overbrace{\left(\left(\left(a^m \right)^m \right)^{\dots} \right)^m }^{n \text{ vezes}} = a^{m^n}.$$

Exemplos de Aplicação 02

$$\text{a) } \overbrace{\left(\left(\left(2^3 \right)^3 \right)^{\dots} \right)^3 }^{100 \text{ vezes}} = 2^{3^{100}}.$$

$$\text{d) } \overbrace{\left(\left(\left(n^5 \right)^5 \right)^{\dots} \right)^5 }^{n \text{ vezes}} = n^{5^n}.$$

$$\text{b) } \overbrace{\left(\left(\left(3^3 \right)^3 \right)^{\dots} \right)^3 }^{x \text{ vezes}} = 3^{3^x}.$$

$$\text{e) } \overbrace{\left(\left(\left(3^{36} \right)^{36} \right)^{\dots} \right)^{36} }^{2017 \text{ vezes}} = 3^{36^{2017}}.$$

$$\text{c) } \overbrace{\left(\left(\left(a^a \right)^a \right)^{\dots} \right)^a }^{a \text{ vezes}} = a^{a^a}.$$

P6. Potência de Ordem Superior:

Numa potência de ordem superior, repete-se a base e eleva-se o expoente a potência.

$$\overbrace{a^{\left(\left(\left(m^n \right)^n \right)^{\dots} \right)^n } }^{p \text{ vezes}} = a^{m^{np}} ; \forall m, n, p \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

$$\overbrace{a \left(\left((m^n)^n \right)^{\dots n} \right)^n}^{\text{"p" vezes}} = a^{m^{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}} \Rightarrow \boxed{a \left(\left((m^n)^n \right)^{\dots n} \right)^n}^{\text{"p" vezes}} = a^{m^{np}}$$

Consequências:**1) Se as potências forem distintas:**

Se as potências forem distintas, repete-se a base e multiplicam-se os expoentes distintos.

$$\boxed{\left(\left(\left(a^{m^n} \right)^{p^q} \right)^{r^s} \right)^{\dots}} = a^{m^n \cdot p^q \cdot r^s \dots}; \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exemplos de Aplicação 03

$$\text{a) } \overbrace{2 \left(\left((2^n)^n \right)^{\dots n} \right)^n}^{\text{"n" vezes}} = 2^{2^{n^n}}.$$

$$\text{c) } \left(\left(\left(2^{2^n} \right)^{3^p} \right)^{5^q} \right)^{\dots} = 2^{2^n \cdot 3^p \cdot 5^q}.$$

$$\text{b) } \overbrace{a \left(\left((m^a)^a \right)^{\dots a} \right)^a}^{\text{"m" vezes}} = a^{m^a m}.$$

$$\text{d) } \left(\left(\left(a^{a^x} \right)^{b^y} \right)^{c^z} \right)^{\dots} = a^{a^x \cdot b^y \cdot c^z}.$$

2) Se os expoentes forem distintos:

Se as potências forem distintas e seus respectivos expoentes forem iguais, podemos usar a propriedade do produto elevado a potência.

$$\boxed{\left(\left(\left(a^{m^n} \right)^{p^n} \right)^{r^n} \right)^{\dots}} = a^{(m \cdot p \cdot r \dots)^n}; \forall a \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

$$\left(\left(\left(a^{m^n} \right)^{p^n} \right)^{r^n} \right)^{\dots} = a^{m^n \cdot p^n \cdot r^n \dots} \therefore \boxed{\left(\left(\left(a^{m^n} \right)^{p^n} \right)^{r^n} \right)^{\dots} = a^{(m \cdot p \cdot r \dots)^n}}$$

Exemplos Resolvidos 06

$$a) \left(\left(\left(3^{2^n} \right)^{3^n} \right)^{5^n} \right)^{7^n} = 3^{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^n} \Rightarrow \left(\left(\left(3^{2^n} \right)^{3^n} \right)^{5^n} \right)^{7^n} = 3^{210^n}$$

$$b) \left(\left(\left(n^{x^n} \right)^{(2y)^n} \right)^{(4z)^n} \right)^{\dots} = n^{(x \cdot 2y \cdot 4z)^n} \Rightarrow \left(\left(\left(n^{x^n} \right)^{(2y)^n} \right)^{(4z)^n} \right)^{\dots} = n^{(8x \cdot y \cdot z)^n}$$

3) Se os expoentes forem distintos e suas bases iguais:

Se as potências forem distintas e suas respectivas bases forem iguais, podemos usar a propriedade do produto de potência de mesma base.

$$\boxed{\left(\left(\left(a^{m^n} \right)^{m^q} \right)^{m^s} \right)^{\dots} = a^{m^{n+q+s+\dots}}; \forall a \in \mathbb{R}}$$

Demonstração:

$$\left(\left(\left(a^{m^n} \right)^{m^q} \right)^{m^s} \right)^{\dots} = a^{m^n \cdot m^q \cdot m^s \dots} \therefore \boxed{\left(\left(\left(a^{m^n} \right)^{m^q} \right)^{m^s} \right)^{\dots} = a^{m^{n+q+s+\dots}}}$$

Exemplos Resolvidos 07

$$a) \left[\left(\left(5^{2^{10}} \right)^{2^{30}} \right)^{2^{60}} \right] = 5^{2^{10+30+60}} \Rightarrow \left[\left(\left(5^{2^{10}} \right)^{2^{30}} \right)^{2^{60}} \right] = 5^{2^{100}}$$

$$b) \left[\left(\left(x^{x^x} \right)^{x^x} \right)^{x^x} \right] = x^{x^{x+x+x}} \Rightarrow \left[\left(\left(x^{x^x} \right)^{x^x} \right)^{x^x} \right] = x^{x^{3x}}$$

4) Se os expoente forem iguais e as bases iguais:

Se os expoentes forem iguais e suas respectivas bases também são iguais, podemos usar o produto de potências de mesma base.

$$\overbrace{\left[\left(\left(a^{m^n} \right)^{m^n} \right)^{m^n} \right]^{...}}^{\text{"p" vezes}} = a^{m^{n \cdot p}}$$

Demonstração:

$$\overbrace{\left[\left(\left(a^{m^n} \right)^{m^n} \right)^{m^n} \right]^{...}}^{\text{"p" vezes}} = a^{\overbrace{m^n \cdot m^n \cdot m^n \dots}^{\text{"p" vezes}}} \Rightarrow \overbrace{\left[\left(\left(a^{m^n} \right)^{m^n} \right)^{m^n} \right]^{...}}^{\text{"p" vezes}} = a^{(m^n)^p}$$

$$\therefore \overbrace{\left[\left(\left(a^{m^n} \right)^{m^n} \right)^{m^n} \right]^{...}}^{\text{"p" vezes}} = a^{m^{n \cdot p}}$$

Exemplos Resolvidos 08

$$\text{a) } \overbrace{\left(\left(\left(x^{x^x} \right)^{x^x} \right)^{x^x} \right)^{\dots}}^{\text{"x" vezes}} = x^{x^{x^x}} \Rightarrow \overbrace{\left(\left(\left(x^{x^x} \right)^{x^x} \right)^{x^x} \right)^{\dots}}^{\text{"x" vezes}} = x^{x^{x^2}}$$

$$\text{b) } \overbrace{\left(\left(\left(x^{y^z} \right)^{y^z} \right)^{y^z} \right)^{\dots}}^{\text{"x+1" vezes}} = x^{y^{z \cdot (x+1)}} \Rightarrow \overbrace{\left(\left(\left(x^{y^z} \right)^{y^z} \right)^{y^z} \right)^{\dots}}^{\text{"x+1" vezes}} = x^{y^{xz+z}}$$

P7. Potência de mesma base e expoentes em PG:

Numa potência com expoentes em PG, repete-se a base, e o expoente expressa-se como soma de uma PG.

$$\overbrace{\left(a \dots \left(a \left(a \left(a \right)^m \right)^m \right)^{\dots} \right)^m}^{\text{"n" parênteses}} = a^{m \cdot \left(\frac{m^n - 1}{m - 1} \right)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left(a \dots \left(a \left(a \left(a \right)^m \right)^m \right)^{\dots} \right)^m}^{\text{"n" parênteses}} = \overbrace{\left(a \dots \left(a \left(a \left(a^{m^2} \right)^m \right)^{\dots} \right)^m \right)^m}^{\text{"n" parênteses}} = \\ & \overbrace{\left(a \dots \left(a \left(a^m \left(a^{m^3} \right)^{\dots} \right)^{\dots} \right)^{\dots} \right)^m}^{\text{"n" parênteses}} = \dots \\ & \therefore \overbrace{\left(a \dots \left(a \left(a \left(a \right)^m \right)^m \right)^{\dots} \right)^m}^{\text{"n" parênteses}} = a^{m \cdot \left(\frac{m^n - 1}{m - 1} \right)} \end{aligned}$$

Generalização:

Numa potência com expoentes em PG de potências, repete-se a base, e o expoente expressa-se como soma de uma PG.

$$\overbrace{\left(a^n \dots \left(a^n \left(a^n \left(a^n \left(a^n \right)^m \right)^m \right)^m \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} = a^{n \cdot \left(\frac{m^{p+1} - m}{m-1} \right)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left(a^n \dots \left(a^n \left(a^n \left(a^n \right)^m \right)^m \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} = \overbrace{\left(a^n \dots \left(a^n \left(a^n \left(a^n \cdot a^{nm} \right)^m \right)^m \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} = \\ & \overbrace{\left(a^n \dots \left(a^n \left(a^n \cdot a^{nm} \cdot a^{nm^2} \right)^m \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} = \overbrace{\left(a^n \dots \left(a^n \cdot a^{nm} \cdot a^{nm^2} \cdot a^{nm^3} \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} \\ & = \overbrace{\left(a^n \dots \left(a^{n \cdot (1 + m + m^2 + m^3)} \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} = \dots \\ & \Rightarrow \overbrace{\left(a^n \dots \left(a^n \left(a^n \left(a^n \right)^m \right)^m \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} = a^{n \cdot \left[m \cdot \left(\frac{m^p - 1}{m-1} \right) \right]} \\ & \therefore \overbrace{\left(a^n \dots \left(a^n \left(a^n \left(a^n \right)^m \right)^m \right)^m \right)^m}^{\text{"p" parênteses}} = a^{n \cdot \left(\frac{m^{p+1} - m}{m-1} \right)} \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 09

Determine $\overbrace{\left(3 \dots \left(3(3^2)\right)^{\dots}\right)^2}^{\text{"10" parênteses}}.$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \overbrace{\left(3 \dots \left(3(3^2)\right)^{\dots}\right)^2}^{\text{"10" parênteses}} &= 3^{2 \cdot \left(\frac{2^{10}-1}{2-1}\right)} = \overbrace{\left(3 \dots \left(3(3^2)\right)^{\dots}\right)^2}^{\text{"10" parênteses}} = 3^{2 \cdot (2^{10}-1)} \\ &\Rightarrow \overbrace{\left(3 \dots \left(3(3^2)\right)^{\dots}\right)^2}^{\text{"10" parênteses}} = 3^{2 \cdot (1023)} \Rightarrow \overbrace{\left(3 \dots \left(3(3^2)\right)^{\dots}\right)^2}^{\text{"10" parênteses}} = 3^{2046}. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 10

Calcule $\overbrace{\left(x \dots \left(x \left(x \left(x(x)^x)^x\right)^{\dots}\right)^x\right)^x}^{\text{"x" parênteses}}.$

Resolução: Podemos escrever:

$$\overbrace{\left(x \dots \left(x \left(x \left(x(x)^x)^x\right)^{\dots}\right)^x\right)^x}^{\text{"x" parênteses}} = x^{\left(\frac{x^x-1}{x-1}\right)} = x^{\left(\frac{x^{x+1}-x}{x-1}\right)}.$$

Exemplo Resolvido 11

Determine $\overbrace{\left(2^9 \dots \left(2^9 \left(2^9 \left(2^9\right)^{10}\right)^{\dots}\right)^{10}\right)^{10}}^{\text{"2016" parênteses}}.$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \overbrace{2^9 \dots \left(2^9 \left(2^9 \left(2^9 \right)^{10} \right)^{10} \right)^{10}}^{\text{"2016" parênteses}} \Rightarrow E = 2^{9 \cdot \left(\frac{10^{2016} + 1 - 10}{10 - 1} \right)}$$

$$\Rightarrow E = 2^{9 \cdot \left(\frac{10^{2017} - 10}{9} \right)} \therefore E = 2^{(10^{2017} - 10)}$$

Problemas Propostos

Questão 1.11 (Harvard-MIT-2012)

Se $4^{4^4} = \sqrt[128]{2^{2^{2^n}}}$, encontre o valor de n .

Questão 1.12

Determine $\overbrace{\left(\left(\left(\left(2^{3^5} \right)^{3^5} \right)^{3^5} \right)^{3^5} \right)^{\dots}}^{\text{"2016" vezes}}.$

Questão 1.13

Determine $\overbrace{x^x \cdot x^x \cdot \dots \cdot x^x}^{\text{"x" vezes}}.$

Questão 1.14

Determine $\overbrace{\left(x^x \cdot \left(x^x \cdot \left(x^x \cdot \dots \cdot \left(x^x \right)^x \right)^x \right)^x \right)^x}^{\text{"x" vezes}}.$

Questão 1.15

"50" vezes

Determine $a^3b^4 \cdot a^3b^4 \cdot \dots \cdot a^3b^4$.**Questão 1.16**

"100" vezes

Determine $a^3b^4c^5 \cdot a^3b^4c^5 \cdot \dots \cdot a^3b^4c^5$.**Questão 1.17**Determine $x \cdot (x^2)^2 \cdot (x^3)^3 \cdot (x^4)^4 \cdot \dots \cdot (x^n)^n$.Sugestão: Use $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.**Questão 1.18**Determine $x^2 \cdot (x^2)^3 \cdot (x^3)^4 \cdot (x^4)^5 \cdot \dots \cdot (x^n)^{n+1}$.Sugestão: Use $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.**Questão 1.19**Determine $x \cdot \left((x^2)^2\right)^2 \cdot \left((x^3)^3\right)^3 \cdot \left((x^4)^4\right)^4 \cdot \dots \cdot \left((x^n)^n\right)^n$.Sugestão: Use $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.**Questão 1.20**Determine $(x^2)^3 \cdot \left((x^2)^3\right)^4 \cdot \left((x^3)^4\right)^5 \cdot \dots \cdot \left((x^n)^{n+1}\right)^{n+2}$.Sugestão: Use $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Agora vamos ver as bases fracionárias e os expoentes negativos. Vamos lá!

1.3) Potência com Expoente Negativo:

Numa potência com expoente negativo, inverte-se a base, e coloca-se o expoente positivo.

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m \Rightarrow a^{-m} = \frac{1^m}{a^m} \therefore \boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}.$$

Consequências:

$$a) \quad a^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1^1}{a^1} \therefore \boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}.$$

$$b) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b^1}{a^1} \therefore \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}.$$

$$c) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \Rightarrow a^{-m} = \frac{b^m}{a^m} \therefore \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{b^m}{a^m}}.$$

Exemplos Resolvidos 12

$$a) \quad 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}.$$

$$c) \quad \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{7}\right)^1 = \frac{4}{7}.$$

$$b) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{1}\right)^1 = 3.$$

$$d) \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}.$$

1.4) Divisão Composta:

Numa divisão composta, podemos alternar os expoentes de cada termo da divisão composta.

$$\boxed{\frac{a}{\left(\frac{b}{\left(\frac{c}{\vdots}\right)}\right)}} = a^{+1} \cdot b^{-1} \cdot c^{+1} \dots; \forall a, b, c, \dots \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Exemplos Resolvidos 13

$$a) \frac{2}{\begin{pmatrix} 3 \\ \left(\frac{2}{3} \right) \end{pmatrix}} = 2^{+1} \cdot 3^{-1} \cdot 2^{+1} \cdot 3^{-1} = 2^2 \cdot 3^{-2} = \frac{2^2}{3^2} \Rightarrow \frac{2}{\begin{pmatrix} 3 \\ \left(\frac{2}{3} \right) \end{pmatrix}} = \frac{4}{9}.$$

$$b) \frac{a}{\begin{pmatrix} b \\ \left(\frac{a}{b} \right) \end{pmatrix}} = a^{+1} \cdot b^{-1} \cdot a^{+1} \cdot b^{-1} \cdot a^{+1} = a^3 \cdot b^{-2} \Rightarrow \frac{a}{\begin{pmatrix} b \\ \left(\frac{a}{b} \right) \end{pmatrix}} = \frac{a^3}{b^2}.$$

Vimos as bases fracionárias. Agora veremos os expoentes fracionários. Sigam-me!

1.5) Potência com Expoente Fracionário:

Numa potência com expoente fracionário, o denominador é o índice do radical, e o numerador é o expoente do radicando.

$$a) \frac{1}{a^m} = \sqrt[m]{a^1}.$$

$$b) \frac{m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m.$$

$$c) \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = a^{\left(\frac{1}{m^n} \right)} = a^{m^{-n}}.$$

$$d) \frac{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}}{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{p} \right)} \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m]{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{p} \right)} \sqrt[p]{a} \Rightarrow \frac{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}}{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}} = a^{\left(\frac{1}{m} \right) \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{p} \right)}.$$

$$e) \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \therefore \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \left(\frac{1}{a} \right)^{\left(\frac{1}{n} \right)}.$$

Exemplos Resolvidos 14

$$a) 16^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{16} \therefore 16^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 4.$$

$$b) 16^{\left(\frac{5}{4}\right)} = \sqrt[4]{16^5} \Rightarrow 16^{\left(\frac{5}{4}\right)} = \sqrt[4]{(2^4)^5} \Rightarrow 16^{\left(\frac{5}{4}\right)} = \sqrt[4]{2^{20}} \\ \Rightarrow 16^{\left(\frac{5}{4}\right)} = 2^{\left(\frac{20}{4}\right)} \Rightarrow 16^{\left(\frac{5}{4}\right)} = 2^5 \therefore 16^{\left(\frac{5}{4}\right)} = 32.$$

$$c) x^{\sqrt{x}} = x^{\left(\frac{1}{x^x}\right)} \therefore x^{\sqrt{x}} = x^{x^{-x}}.$$

$$d) \sqrt[3]{a} \sqrt{a} = a^{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)} \therefore \sqrt[3]{a} \sqrt{a} = a^{\left(a^{-1}\right)\left(a^{-1}\right)\left(a^{-1}\right)}.$$

$$e) \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = (x^{-1})^{\left(x^{-1}\right)}.$$

Problemas Propostos

Questão 1.21

$$\text{Simplifique } \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{2}}}.$$

Questão 1.22

$$\text{Simplifique } \left(\frac{2a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right) \left(\frac{2a^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Questão 1.23 (AHSME-1954)

O valor de $\frac{1}{16} \cdot a^0 + \left(\frac{1}{16}\right)^0 - \left(64^{-\frac{1}{2}}\right) - (32)^{-\frac{4}{5}}$ é:

a) $1\frac{13}{16}$

b) $1\frac{3}{16}$

c) 1

d) $\frac{7}{8}$

e) $\frac{1}{16}$

Questão 1.24 (AHSME-1971)

Se $S = \left(1 + 2^{-\frac{1}{32}}\right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{16}}\right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{8}}\right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{4}}\right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{2}}\right)$, então S é igual a:

- a) $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - 2^{-\frac{1}{32}}\right)^{-1}$ b) $\left(1 - 2^{-\frac{1}{32}}\right)^{-1}$ c) $1 - 2^{-\frac{1}{32}}$
 d) $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - 2^{-\frac{1}{32}}\right)$ e) $\frac{1}{2}$

Questão 1.25

Reduzindo a expressão $(-a^2)^3 \cdot (-a^{-3})^2 \cdot (a^{3^2}) \cdot (a^{-3^2}) \cdot (-a^{(-3)^2})$, obtemos:

- a) $\frac{1}{8}$
 b) 2
 c) 9
 d) $\frac{7}{9}$
 e) a^9

Questão 1.26

Simplifique $\left\{ \frac{\left[\left(\frac{m+1}{m^m} + \frac{m-1}{m^m} \right)^m \right]^{\frac{m}{m^2-1}}}{m^{m-1} \left(\frac{2}{m^m} + 1 \right)^{\frac{1}{m}}} \right\}^m$.

Questão 1.27

Determine $\frac{a^{n^2}}{\left(\frac{b^{n^3}}{c^{n^4}}\right)}.$

Questão 1.28

Sabendo que n é par, determine:

$$\frac{a^n}{\left(\frac{a^{-2n}}{\left(\frac{a^{3n}}{a^{-4n}}\right)}\right)}.$$

Questão 1.29

Sabendo que n é par, determine:

$$\frac{a^n}{\left(\frac{a^{-n^2}}{\left(\frac{a^{n^3}}{a^{-n^4}}\right)}\right)}.$$

Capítulo 02 - Radiciação

Introdução

A radiciação nada mais é que a operação inversa à potenciação, ou seja, ela é utilizada para representar, de maneira diferente, uma potência com expoente fracionário. Vamos conhecer essa ferramenta que nos ajudará a resolver vários problemas.

2.1) Definição:

Dado um número real não negativo a e um número natural $m > 1$, chama-se raiz m -ésima de a o número real não negativo b , tal que $b^m = a$.

$$\sqrt[m]{a} = b \Leftrightarrow b^m = a$$

Exemplos de Aplicação:

Exemplo 01: $\sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$.

Exemplo 02: $\sqrt[4]{2401} = 7 \Leftrightarrow 7^4 = 2401$.

Exemplo 03: $\sqrt[6]{15625} = 5 \Leftrightarrow 5^6 = 15625$.

2.2) Como Expoente Fracionário:

A raiz m -ésima de um número a poder ser definida como sendo uma potência de a , com expoente sendo o inverso de m , assim:

$$\sqrt[m]{a} = a^{\left(\frac{1}{m}\right)}$$

Consequência:

Se tiver expoente, esse fica como numerador.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\left(\frac{n}{m}\right)}$$

Exemplo Resolvido 15: Efetue $\sqrt[10]{a}$.

Resolução: Podemos escrever: $\sqrt[10]{a} = a^{\left(\frac{1}{10}\right)} = a^{\left(10^{-1}\right)}$.

Exemplo Resolvido 16: Mostre que $\sqrt[6]{11^{12}} = 121$.

Resolução: Podemos escrever: $\sqrt[5]{11^{12}} = 11^{\left(\frac{12}{5}\right)} = 11^2 = 121$.

Exemplo Resolvido 17: Mostre que $\sqrt[5]{32} = 2$.

Resolução: Podemos escrever: $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2^{\left(\frac{5}{5}\right)} = 2^1 = 2$.

2.3) Propriedades da Radiação:

As propriedades da radiação facilitam os cálculos de expressões numéricas e equações que envolvem raízes.

P1. Produto de Raízes de Mesmo Índice:

Num produto de raízes de mesmo índice, repete-se o radical e efetua-se a multiplicação.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Consequências:

- a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \dots = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \dots}$.
- b) $\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b^p} \cdot \sqrt[n]{c^q} \dots = \sqrt[n]{a^n \cdot b^p \cdot c^q \dots}$.

Exemplo Resolvido 18: Efetue $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[4]{d}$.

Resolução: $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[4]{d} = \sqrt[4]{abcd}$.

Exemplo Resolvido 19: Efetue $\sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{81}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{64 \cdot 81} = \sqrt[4]{4^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{12^4} = 12.$$

Exemplo Resolvido 20: Mostre que $\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[4]{c^4} = c \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[4]{c^4} = \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^4} = c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3}.$$

P2. Divisão de Raízes de Mesmo Índice:

Numa divisão de raízes de mesmo índice, repete-se o radical e efetua-se a divisão.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Consequência:

Numa divisão de raízes elevada a potência, repete-se o radical e conserva-se a potência.

$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^p}} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^p}}$$

Exemplo Resolvido 21: Efetue $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[6]{5}}$.

Resolução: Podemos escrever: $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{\frac{20}{5}} \Rightarrow \frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{4}$.

Exemplo Resolvido 22: Mostre que $\frac{\sqrt[m]{a^{2m}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a^2}{b}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{\sqrt[m]{a^{2m}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \sqrt[m]{\frac{a^{2m}}{b^m}} \Rightarrow \frac{\sqrt[m]{a^{2m}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \sqrt[m]{\frac{(a^2)^m}{b^m}} \Rightarrow \frac{\sqrt[m]{a^{2m}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a^2}{b}.$$

Exemplo Resolvido 23: Mostre que $\frac{10\sqrt[10]{2^{20} \cdot 3^2}}{10\sqrt[10]{2^{10}}} = 2 \cdot 10\sqrt[10]{9}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{10\sqrt[10]{2^{20} \cdot 3^2}}{10\sqrt[10]{2^{10}}} = 10\sqrt[10]{\frac{2^{20} \cdot 3^2}{2^{10}}} = 10\sqrt[10]{2^{10} \cdot 3^2} = 2 \cdot 10\sqrt[10]{3^2}$$

$$E = \frac{10\sqrt[10]{2^{20} \cdot 3^2}}{10\sqrt[10]{2^{10}}} = 2 \cdot 10\sqrt[10]{9}.$$

Problemas Propostos

Questão 2.1 (CN-1964)

Simplifique $\frac{\sqrt[4]{a} \div \sqrt[8]{a}}{\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[9]{a}}}}$.

Questão 2.2 (CN-2000)

Sabendo que $\sqrt[3]{x^2} = 1996^6$, $\sqrt{y} = 1994^4$ e $\sqrt[5]{z^4} = 1999^8$, com ($x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$), o valor de $(xyz)^{\frac{1}{3}}$ é:

- a) 1999^9
- b) 1999^6
- c) $1999^{\frac{1}{9}}$
- d) 1999^{-6}
- e) 1999^{-9}

Questão 2.3 (AHSME-1956)

Simplificando $\left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}} \right]^4 \cdot \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}} \right]^4$, temos:

- a) a^{16}
- b) a^{12}
- c) a^8
- d) a^4
- e) a^2

Questão 2.4 (AHSME-1998)

Se $N > 1$, então $\sqrt[3]{N} \sqrt[3]{N} \sqrt[3]{N}$, vale:

- a) $N^{\frac{1}{27}}$
- b) N^9
- c) $N^{\frac{1}{3}}$
- d) $N^{\frac{13}{27}}$
- e) N

Questão 2.5 (Harvard-MIT-1998)

Dado que r e s são inteiros positivos e primos relativos, tal que

$$\frac{r}{s} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{10})}{5(\sqrt{3} + \sqrt{5})}, \text{ encontre } r \text{ e } s.$$

Questão 2.6

Simplifique a expressão $\frac{a-b}{\sqrt{\frac{7^{a-b} + 2^{a-b}}{7^{b-a} + 2^{b-a}}}}$.

Questão 2.7

Simplifique a expressão $\frac{b-a}{\sqrt{\frac{a^{a+b} \cdot b^b + b^{a+b} \cdot a^a}{a^{2b} \cdot b^a + b^{2a} \cdot a^b}}}$.

Questão 2.8

Simplifique a expressão $\frac{\frac{a-b}{\sqrt{4^a}} + \frac{a-b}{\sqrt{4^b}}}{\frac{a-b}{\sqrt{2^{a+b}}}}$.

Questão 2.9

Simplifique a expressão $\frac{(a^{a+1}+1)^2}{\sqrt{a \left[a^a \left[a \left(a^a \right)^{a^a} \right]^a \right]^{a^a}}}$.

P3. Raiz de uma Raiz:

Para a raiz de uma raiz, repete-se o radicando e multiplicam-se os índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Consequências:

$$a) \quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[p \cdot q \cdot r]{a}$$

$$b) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[n \cdot m \cdot n]{a} \quad \therefore \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[m]{a}$$

$$c) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2]{a} \quad \therefore \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}} = \sqrt[2^m]{a}$$

$$d) \quad \sqrt[n]{2^m \sqrt[n]{2^m \sqrt[n]{2^m a}}} = \sqrt[n \cdot m \cdot n \cdots n]{2^m \cdot 2^m \cdot 2^m \cdots 2^m a} \quad \therefore \quad \sqrt[n]{2^m \sqrt[n]{2^m \sqrt[n]{2^m a}}} = \sqrt[2^{mn}]{a}$$

$$e) \quad \sqrt[d^p]{c^n \sqrt[b^m]{a}} = \sqrt[b^m \cdot c^n \cdot d^p]{a}$$

$$f) \quad \sqrt[b^p]{b^n \sqrt[b^n]{a}} = \sqrt[b^m \cdot b^n \cdot b^p]{a} \quad \therefore \quad \sqrt[b^p]{b^n \sqrt[b^n]{a}} = \sqrt[b^{m+n+p}]{a}$$

$$g) \quad \sqrt[\sqrt[m]{n}]{\sqrt[\sqrt[n]{p}]{a}} = \sqrt[\sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[n]{p}]{a}$$

$$h) \quad \sqrt[\sqrt[n]{p}]{\sqrt[\sqrt[m]{q}]{a}} = \sqrt[\sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[m]{q}]{a} \quad \therefore \quad \sqrt[\sqrt[n]{p}]{\sqrt[\sqrt[m]{q}]{a}} = \sqrt[\sqrt[n \cdot p \cdot q]{a}]$$

$$i) \quad \sqrt[\sqrt[n]{p}]{\sqrt[\sqrt[m]{q}]{a}} = \sqrt[\sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[m]{q}]{a} \quad \therefore \quad \sqrt[\sqrt[n]{p}]{\sqrt[\sqrt[m]{q}]{a}} = \sqrt[n \left(\frac{1}{m} \right) + \left(\frac{1}{p} \right) + \left(\frac{1}{q} \right) \cdots]{a}$$

$$j) \quad \sqrt[\sqrt[m]{b}]{\sqrt[\sqrt[n]{c}]{\sqrt[\sqrt[p]{d}]{a}}} = \sqrt[\sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[p]{d}]{a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k)} \quad & \sqrt[n]{\sqrt[n]{m^b} \sqrt[n]{n^c} \sqrt[n]{p^d} \dots \sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{m^b} \cdot \sqrt[n]{n^c} \cdot \sqrt[n]{p^d} \dots \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \\
 & \therefore \sqrt[n]{\sqrt[n]{m^b} \sqrt[n]{n^c} \sqrt[n]{p^d} \dots \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{m^b \cdot n^c \cdot p^d \dots a} . \\
 \\
 \text{l)} \quad & \sqrt[n]{\sqrt[n]{m^b} \sqrt[n]{m^c} \sqrt[n]{m^d} \dots \sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{m^b} \cdot \sqrt[n]{m^c} \cdot \sqrt[n]{m^d} \dots \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \\
 & \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[n]{m^b} \sqrt[n]{m^c} \sqrt[n]{m^d} \dots \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{m^b \cdot m^c \cdot m^d \dots a} \\
 & \therefore \sqrt[n]{\sqrt[n]{m^b} \sqrt[n]{m^c} \sqrt[n]{m^d} \dots \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{m^{b+c+d+\dots} a} .
 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 24: Efetue $\sqrt[7]{\sqrt[3]{m}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{m}} = \sqrt[3]{\sqrt[7]{m}} \Rightarrow \sqrt[7]{\sqrt[3]{m}} = \sqrt[21]{m} .$$

Exemplo Resolvido 25: Efetue $\sqrt[5]{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[5]{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \sqrt[4]{10}}{\sqrt[5]{10}} \therefore \sqrt[5]{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}} = \frac{120}{\sqrt[5]{10}} .$$

Exemplo Resolvido 26: Mostre que $\sqrt[2016]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[2016]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}} = \frac{\sqrt[2016]{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3} a}{\sqrt[2016]{a}} \therefore \sqrt[2016]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}} .$$

Exemplo Resolvido 27: Mostre que $\sqrt[2010]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[2010]{\sqrt[2010]{\sqrt[2010]{\sqrt[2010]{\sqrt[2010]{a}}}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2]{a} \therefore \sqrt[2010]{\sqrt[2010]{\sqrt[2010]{\sqrt[2010]{\sqrt[2010]{a}}}}} = \sqrt[2010]{a}.$$

Exemplo Resolvido 28: Efetue $\sqrt[10]{2^{10} \sqrt[10]{2^{10} \sqrt[10]{2^{10} \sqrt{2}}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[10]{2^{10} \sqrt[10]{2^{10} \sqrt[10]{2^{10} \sqrt{2}}}} \Rightarrow E = \sqrt[2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \dots 2^{10}}{2} \Rightarrow E = \sqrt[2^{10 \cdot 10}]{2} \\ \Rightarrow E = \sqrt[2^{100}]{2} \therefore E = 2^{\left(\frac{1}{2^{100}}\right)}.$$

Exemplo Resolvido 29: Efetue $3^2 \sqrt[2]{2^3 \sqrt[2]{5^2 \sqrt{2}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 3^2 \sqrt[2]{2^3 \sqrt[2]{5^2 \sqrt{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2]{2} \Rightarrow E = \sqrt[9 \cdot 8 \cdot 25]{2} \therefore 3^2 \sqrt{E} = \sqrt[1800]{2}.$$

Exemplo Resolvido 30: Mostre que $3^m \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3^4 \sqrt[3]{3^3 \sqrt[3]{3^2 \sqrt{a}}}}}} = a^{\frac{(m+2)(1-m)}{2}}.$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 3^m \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3^4 \sqrt[3]{3^3 \sqrt[3]{3^2 \sqrt{a}}}}}} = \sqrt[3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \dots]{a} = \sqrt[3^2 + 3 + 4 + \dots + m]{a} \\ E = \sqrt[3^{\frac{(2+m)(m-1)}{2}}]{a} = a^{\frac{1}{\frac{(m+2)(m-1)}{2}}} = a^{\frac{(m+2)(1-m)}{2}}.$$

Exemplo Resolvido 31: Mostre que $\sqrt{5 \sqrt[3]{4 \sqrt[4]{3 \sqrt[5]{2 \sqrt{a}}}}} = \sqrt[60]{2^{52} \cdot 3^{15} \cdot 5^{30}} \sqrt{a}.$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[5]{\sqrt[3]{4} \sqrt[4]{3} \sqrt[5]{2} \sqrt{a}} = \sqrt[5]{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{a}} = \sqrt[5]{2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 4^{20} \cdot 5^{30}} \sqrt{a}$$

$$E = \frac{60 \sqrt[5]{2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 4^{20} \cdot 5^{30}}}{\sqrt{a}} = \frac{60 \sqrt[5]{2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 2^{40} \cdot 5^{30}}}{\sqrt{a}} = \frac{60 \sqrt[5]{2^{52} \cdot 3^{15} \cdot 5^{30}}}{\sqrt{a}}$$

Exemplo Resolvido 32: Efetue $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{25} \sqrt{2}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{25} \sqrt{2} \Rightarrow E = \sqrt[3]{4 \cdot 5 \cdot 25} \sqrt{2} \Rightarrow E = \sqrt[3]{4 \cdot 5 \cdot 25} \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5 \cdot 5^2} \sqrt{2} \Rightarrow E = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5^3} \sqrt{2} \Rightarrow E = 5 \cdot \sqrt[3]{2^2} \sqrt{2} \Rightarrow E = 5 \cdot \sqrt[3]{4} \sqrt{2}$$

Exemplo Resolvido 33: Efetue $\sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[6]{x} \sqrt{x}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[6]{x} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x} \dots \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = x^{\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)} \sqrt{x}$$

$$E = x^{\left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)} \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[6]{x} \sqrt{x} = \sqrt[6]{x^6} = \sqrt{x}$$

Exemplo Resolvido 34: Mostre que $\sqrt{a} \sqrt[4]{b^3} \sqrt[5]{c^4} \sqrt{x} = \frac{20 \sqrt[10]{a^{10} \cdot b^{15} \cdot c^{16}}}{\sqrt{x}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{a} \sqrt[4]{b^3} \sqrt[5]{c^4} \sqrt{x} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[5]{c^4}}{\sqrt{x}} \Rightarrow E = \frac{20 \sqrt[10]{a^{10} \cdot b^{15} \cdot c^{16}}}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \sqrt{a} \sqrt[4]{b^3} \sqrt[5]{c^4} \sqrt{x} = \frac{20 \sqrt[10]{a^{10} \cdot b^{15} \cdot c^{16}}}{\sqrt{x}}$$

Exemplo Resolvido 35: Mostre que $\sqrt[3]{x^{2y}} \sqrt[3]{2y} \sqrt[3]{3^3 y} \sqrt{x^y} = \sqrt[3]{54 y \cdot x^{2y}} \sqrt{x^y}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[3]{x^{2y}} \sqrt[3]{2y} \sqrt[3]{3^{3y}} \sqrt{x^y} \Rightarrow E = \sqrt[3]{x^{2y} \cdot 2y \cdot 3^{3y}} \sqrt{x^y} \\
 \Rightarrow E &= \sqrt[3]{(x^2)^y \cdot 2y \cdot (3^3)^y} \sqrt{x^y} \Rightarrow E = \sqrt[3]{(x^2 \cdot 2 \cdot 3^3)^y} \sqrt{x^y} \Rightarrow E = \sqrt[3]{(54x^2)^y} \sqrt{x^y} \\
 \therefore \sqrt[3]{x^{2y}} \sqrt[3]{2y} \sqrt[3]{3^{3y}} \sqrt{x^y} &= \sqrt[3]{54y \cdot x^2y} \sqrt{x^y}
 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 36: Mostre que $\sqrt[3]{xy} \sqrt[3]{xy} \sqrt[3]{xy} \sqrt[3]{xy} \sqrt{x^x} = x^{x \left(\frac{x-4y}{x} \right)}$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[3]{xy} \sqrt[3]{xy} \sqrt[3]{xy} \sqrt[3]{xy} \sqrt{x^x} \Rightarrow E = \sqrt[3]{xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy} \sqrt{x^x} \\
 \Rightarrow E &= \sqrt[3]{x^4 y^4} \sqrt{x^x} \Rightarrow E = \sqrt[3]{x^{4y} y^4} \sqrt{x^x} \Rightarrow E = \sqrt[3]{x^{4y}} \sqrt{x^x} \\
 \Rightarrow E &= x^{\left(\frac{4y}{3} \right)} \sqrt{x^x} \Rightarrow E = x^{x \left(\frac{4y}{x} \right)} \Rightarrow E = x^{x \cdot x \left(\frac{-4y}{x} \right)} \therefore E = x^{x \left(\frac{x-4y}{x} \right)}
 \end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 2.10

Simplifique $\sqrt[3]{4/5/6/a} \cdot 3\sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[5]{a} \sqrt[6]{a}$.

Questão 2.11

Simplifique $n+3 \sqrt[n]{\frac{a^{n^2+5n} \cdot n \sqrt[n]{a^{n^2}}}{a^{3n^2}}}$.

Questão 2.12

Simplifique $\sqrt[n]{\frac{2^{-n} \cdot \sqrt{2^{n+1}}}{4/4}}$.

Questão 2.13

Simplifique $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{16} \sqrt[5]{4}}{2\sqrt[5]{4} \cdot 15\sqrt[2]{2}}}$.

Questão 2.14

Simplifique $\sqrt[n]{\frac{64^n + 16^{2n}}{8^n + 32^n}}$.

Questão 2.15

Simplifique $a-b \sqrt{\frac{b\sqrt{a^ab}}{a\sqrt{ab^b}}}$.

Questão 2.16

Determine xy , se $a-b \sqrt{\frac{b\sqrt{x}}{a\sqrt{y}}} \cdot b-a \sqrt{\frac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}}} = \left[\left(\sqrt{2} \right)^{\frac{x}{a}} \right]^y_b$.

Questão 2.17

Simplifique $\left(\sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{\sqrt{a} \sqrt{a^a}} \right)^{\sqrt{a}(\sqrt{a}-a)} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}$, para $a \neq 0$.

Questão 2.18

Simplifique $(1-\sqrt{2})^2 \sqrt{\left[\left(\sqrt{2} \sqrt{2} \right)^{\sqrt[4]{2}} \cdot 2^{-\sqrt[4]{2}} \right]^{\sqrt[4]{2}}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}}$.

Questão 2.19

Simplifique $\left[\sqrt[5]{5}^{-5\sqrt[5]{5}^3} \cdot \left(-\sqrt[5]{5}(\sqrt[5]{5}-1) \right)^{\frac{\sqrt[5]{5}}{5}} \right]^{5-5^{-1} \cdot \sqrt[5]{5}^{550}}$

Questão 2.20

Simplifique $\frac{9^{\frac{4}{2}}}{\sqrt[9^{\frac{4}{2}}]{\left[3^{\frac{4}{2}} \sqrt[3]{9^{2^{-1}}} \right]^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{9} \right)^{\left(\frac{3}{9} \right)^{2-9^{\frac{4}{2}}}}}}$

Questão 2.21

Se $a = bc$, então $\frac{\sqrt[\frac{a}{a^b}]{\left(\sqrt[\frac{b}{b^a}]{\sqrt{\frac{a}{b}}} \right)^{\frac{b}{a^a}}}}{c^{\left(\sqrt[3]{c} \right)^{c^2+1}}}$, vale:

- a) c
- b) 1
- c) c^{-1}
- d) $\sqrt[3]{c}$
- e) c^2

P4. Produto de Radicais de Índices Diferentes:

Num produto de radicais de índices diferentes, repete-se o radicando, tira-se o MMC dos índices, o resultado divide-se pelo índice de cada radicando e multiplica-se pelo expoente do radicando.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b^m}$$

Consequências:

$$a) \quad \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \frac{m \cdot n}{m} \sqrt[m \cdot n]{(a^p)^n \cdot (b^q)^m} \therefore \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \frac{m \cdot n}{m} \sqrt[m \cdot n]{(a^p \cdot n) \cdot (b^q \cdot m)}$$

$$b) \quad a \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m \cdot b}$$

$$c) \quad a^p \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a^p)^m} \cdot b \therefore a^p \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a^m \cdot p) \cdot b}$$

$$d) \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{b} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b^m}}$$

$$e) \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{b^p} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{(b^p)^m}} \therefore \frac{\sqrt[m]{a}}{b^p} = \sqrt[m]{\frac{a}{b^{m \cdot p}}}$$

$$f) \quad \frac{\sqrt[m]{a^n}}{b^p} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{(b^p)^m}} \therefore \frac{\sqrt[m]{a^n}}{b^p} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^{m \cdot p}}}$$

Exemplo Resolvido 37: Efetue $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \Rightarrow E = \sqrt[3 \cdot 4]{2^4 \cdot 3^3} \Rightarrow E = \sqrt[12]{16 \cdot 27} \therefore \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{432}$$

Exemplo Resolvido 38: Efetue $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3} \Rightarrow E = \sqrt[5 \cdot 4]{(a^2)^4 \cdot (b^3)^5} \therefore E = \sqrt[20]{a^{2 \cdot 4} \cdot b^{3 \cdot 5}} \\ \Rightarrow \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[20]{a^8 \cdot b^{15}}$$

Exemplo Resolvido 39: Mostre que $5 \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{1250}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$5 \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 10} \Rightarrow 5 \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{125 \cdot 10} \Rightarrow 5 \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{1250}.$$

Exemplo Resolvido 40: Mostre que $7^2 \cdot \sqrt[10]{10} = \sqrt[10]{10 \cdot 7^{20}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 7^2 \cdot \sqrt[10]{10} \Rightarrow E = \sqrt[10]{(7^2)^{10} \cdot 10} \Rightarrow E = \sqrt[10]{7^{10 \cdot 2} \cdot 10} \therefore E = \sqrt[10]{10 \cdot 7^{20}}.$$

Exemplo Resolvido 41: Mostre que $\frac{2016\sqrt[2]{2^{2014}}}{2} = 2016\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{2016\sqrt[2]{2^{2014}}}{2} \Rightarrow E = 2016\sqrt[2]{\frac{2^{2014}}{2^{2016}}} \Rightarrow E = 2016\sqrt[2]{\frac{1}{2^2}} \therefore E = 2016\sqrt[4]{\frac{1}{4}}.$$

Exemplo Resolvido 42: Efetue $\frac{\sqrt[3]{3}}{3^p}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{3^p} = \sqrt[3]{\frac{3}{(3^p)^3}} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{3^p} = \sqrt[3]{\frac{3}{3^{3 \cdot p}}} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{3^p} = \sqrt[3]{3^{1-3p}}.$$

Problemas Propostos

Questão 2.22

Simplifique $\frac{\sqrt[3]{a^{m+2}} \cdot \sqrt{a^{m+3}}}{\sqrt[6]{a^{m-1}}}$.

Questão 2.23

Simplifique $\sqrt[3]{2^{10}} \cdot \sqrt[5]{7^7} \cdot \sqrt[3]{81}$.

P5. Raiz de Fração Composta 01:

A raiz de uma fração composta é igual a cada termo da fração composta elevado a expoentes alternados.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{\frac{b}{\left(\frac{c}{\vdots}\right)}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\frac{\sqrt[m]{b}}{\frac{\sqrt[m]{c}}{\vdots}}} = a^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{1}{m}\right)} \cdot c^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \cdot \dots$$

Consequências:

a) $\sqrt[m]{\frac{a}{\frac{b}{\left(\frac{c}{\vdots}\right)}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\frac{\sqrt[m \cdot n]{b}}{\frac{\sqrt[m \cdot n \cdot p]{c}}{\vdots}}} = a^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{1}{m \cdot n}\right)} \cdot c^{\left(+\frac{1}{m \cdot n \cdot p}\right)} \cdot \dots$

b) $\sqrt[m]{\frac{a^r}{\frac{b^s}{\left(\frac{c^t}{\vdots}\right)}}} = \frac{\sqrt[m]{a^r}}{\frac{\sqrt[m \cdot n]{b^s}}{\frac{\sqrt[m \cdot n \cdot p]{c^t}}{\vdots}}} = a^{\left(+\frac{r}{m}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{s}{m \cdot n}\right)} \cdot c^{\left(+\frac{t}{m \cdot n \cdot p}\right)} \cdot \dots$

c) $\sqrt[m]{\frac{a}{\frac{b}{\left(\frac{c}{\vdots}\right)}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\frac{\sqrt[m^2]{b}}{\frac{\sqrt[m^3]{c}}{\vdots}}} = a^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{1}{m^2}\right)} \cdot c^{\left(+\frac{1}{m^3}\right)} \cdot \dots$

d) $\sqrt[m]{\frac{a^n}{\frac{b^n}{\left(\frac{c^n}{\vdots}\right)}}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\frac{\sqrt[m^2]{b^n}}{\frac{\sqrt[m^3]{c^n}}{\vdots}}} = a^{\left(+\frac{n}{m}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{n}{m^2}\right)} \cdot c^{\left(+\frac{n}{m^3}\right)} \cdot \dots$

e)
$$\sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}}} = \frac{m\sqrt[m]{a}}{m^2\sqrt[m]{a}} = a^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \cdot a^{\left(-\frac{1}{m^2}\right)} \cdot a^{\left(+\frac{1}{m^3}\right)} \dots = a^{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} - \dots\right)}$$

f)
$$\sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a^n}}} = \frac{m\sqrt[m]{a^n}}{m^2\sqrt[m]{a^n}} = a^{n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} - \dots\right)}$$

Exemplo Resolvido 43: Mostre que
$$\sqrt[10]{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{5}}} = 2^{\left(+\frac{1}{10}\right)} \cdot 3^{\left(-\frac{1}{10}\right)} \cdot 5^{\left(+\frac{1}{10}\right)}$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[10]{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt[10]{2}}{\sqrt[10]{3}} \Rightarrow \sqrt[10]{\frac{2}{3}} = 2^{\left(+\frac{1}{10}\right)} \cdot 3^{\left(-\frac{1}{10}\right)} \cdot 5^{\left(+\frac{1}{10}\right)}$$

Exemplo Resolvido 44: Mostre que
$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\frac{a}{b \sqrt{\frac{c}{d}}}}}}} = a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{1}{12}\right)} \cdot c^{\left(\frac{1}{60}\right)} \cdot d^{\left(-\frac{1}{120}\right)}$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\frac{a}{b \sqrt{\frac{c}{d}}}}}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5} \sqrt[3]{b}} = a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{1}{12}\right)} \cdot c^{\left(\frac{1}{60}\right)} \cdot d^{\left(-\frac{1}{120}\right)}$$

Consequências:

$$a) \quad \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a}}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{c}} = a^{\left(+\frac{1}{m^3}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{1}{m^2}\right)} \cdot c^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \dots$$

$$b) \quad \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a^n}}{b^p}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^p}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{c^q}} = a^{\left(+\frac{n}{m^3}\right)} \cdot b^{\left(-\frac{p}{m^2}\right)} \cdot c^{\left(-\frac{q}{m}\right)} \dots$$

$$c) \quad \sqrt[m]{\frac{\sqrt[p]{a}}{a}} = \frac{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m \cdot n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = a^{\left(+\frac{1}{m \cdot n \cdot p}\right)} \cdot a^{\left(-\frac{1}{m \cdot n}\right)} \cdot a^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[p]{a}}{a}} = \frac{\sqrt[m \cdot n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = a^{\left(\frac{1}{m \cdot n \cdot p} - \frac{1}{m \cdot n} + \frac{1}{m} + \dots\right)}$$

$$d) \quad \sqrt[m]{\frac{\sqrt[p]{a^r}}{a^s}} = \frac{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a^r}}}{\sqrt[m]{a^s}} = \frac{\sqrt[m \cdot n]{a^r}}{\sqrt[m]{a^s}} = a^{\left(+\frac{r}{m \cdot n \cdot p}\right)} \cdot a^{\left(-\frac{s}{m \cdot n}\right)} \cdot a^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[p]{a^r}}{a^s}} = \frac{\sqrt[m \cdot n]{a^r}}{\sqrt[m]{a^s}} = a^{\left(\frac{r}{m \cdot n \cdot p} - \frac{s}{m \cdot n} + \frac{1}{m} + \dots\right)}$$

$$e) \quad \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}}}{a}} = \frac{\sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}}}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m \cdot m \cdot m]{a}}{\sqrt[m]{a}} = a^{\left(+\frac{1}{m \cdot m \cdot m}\right)} \cdot a^{\left(-\frac{1}{m \cdot m}\right)} \cdot a^{\left(+\frac{1}{m}\right)} \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}}}{a}} = \frac{\sqrt[m \cdot m \cdot m]{a}}{\sqrt[m]{a}} = a^{\left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} + \dots\right)}$$

$$f) \quad \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{m \cdot m \cdot m \sqrt[n]{a^n}}{a^n}}}{a^n}}}{a^n}} = \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{m \cdot m \cdot m \sqrt[n]{a^n}}{a^n}}}{a^n}} = a^{\left(\frac{+n}{m \cdot m \cdot m}\right) \cdot a^{\left(\frac{-n}{m \cdot m}\right) \cdot a^{\left(\frac{+n}{m}\right)} \dots}$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{m \cdot m \cdot m \sqrt[n]{a^n}}{a^n}}}{a^n}}}{a^n}} = \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{\frac{m \cdot m \cdot m \sqrt[n]{a^n}}{a^n}}}{a^n}} = a^{\left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} + \dots\right)}$$

Exemplo Resolvido 47: Mostre que $\sqrt[10]{\frac{12 \sqrt[30]{2}}{3}} = 2^{\left(\frac{1}{3600}\right)} \cdot 3^{\left(\frac{1}{120}\right)} \cdot 5^{\left(\frac{1}{10}\right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[10]{\frac{12 \sqrt[30]{2}}{3}} = \frac{10 \cdot 12 \cdot 30 \sqrt{2}}{10 \sqrt[10]{5}} = 2^{\left(\frac{1}{3600}\right)} \cdot 3^{\left(\frac{1}{120}\right)} \cdot 5^{\left(\frac{1}{10}\right)}$$

Exemplo Resolvido 48: Efetue $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[5]{2^{250}}}{3^{125}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[5]{\frac{\sqrt[5]{2^{250}}}{3^{125}}} \Rightarrow E = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \sqrt{2^{250}}}{5 \cdot 5 \sqrt[5]{3^{125}}} \Rightarrow E = 2^{\left(\frac{250}{5^3}\right)} \cdot 3^{\left(\frac{125}{5^2}\right)} \cdot 7^{\left(\frac{25}{5}\right)}$$

$$\Rightarrow E = 2^{\left(\frac{250}{125}\right)} \cdot 3^{\left(\frac{125}{25}\right)} \cdot 7^{\left(\frac{25}{5}\right)} \therefore E = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7^5$$

Exemplo Resolvido 49: $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[9]{\frac{16 \sqrt[25]{a^{4025}}}{a}}}{a}} = a^{\left(\frac{1}{18}\right)} = \sqrt[18]{a}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[9]{\frac{16 \sqrt[25]{a^{4025}}}{a}}}{a}} \Rightarrow E = \frac{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \sqrt{a^{4025}}}{4 \cdot 9 \cdot 16 \sqrt{a}} = \frac{4 \cdot 9 \sqrt{a}}{4 \sqrt{a}} = \sqrt[18]{a}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= a^{\left(\frac{4025}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25}\right)} \cdot a^{\left(-\frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 16}\right)} \cdot a^{\left(\frac{1}{4 \cdot 9}\right)} \cdot a^{\left(-\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow E = a^{\left(\frac{4025}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} - \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 16} + \frac{1}{4 \cdot 9} - \frac{1}{4}\right)} \\ \Rightarrow E &= a^{\left(\frac{4025}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} - \frac{25}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} + \frac{400}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} - \frac{3600}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25}\right)} \Rightarrow E = a^{\left(\frac{4025 - 25 + 400 - 3600}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25}\right)} \\ \Rightarrow E &= a^{\left(\frac{800}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25}\right)} \Rightarrow E = a^{\left(\frac{2}{4 \cdot 9}\right)} \Rightarrow E = a^{\left(\frac{1}{18}\right)} \therefore E = \sqrt[18]{a}. \\ E &= 2 \cdot 3^{\left(-\frac{125}{5^2}\right)} \cdot 7^{\left(\frac{25}{5}\right)} \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 50: Mostre que $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{x}}{x}}}{x}} = x^{\left(\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4}\right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{x}}{x}}}{x}} \Rightarrow E = \frac{\frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \sqrt{x}}{x \cdot x \cdot x \cdot x \sqrt{x}}}{\frac{x \cdot x \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} \Rightarrow E = x^{\left(-\frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x}\right)} \cdot x^{\left(\frac{1}{x \cdot x \cdot x}\right)} \cdot x^{\left(-\frac{1}{x \cdot x}\right)} \cdot x^{\left(\frac{1}{x}\right)} \\ \Rightarrow E &= x^{\left(-\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow E = x^{\left(-\frac{1}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} + \frac{x^3}{x^4}\right)} \therefore E = x^{\left(\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4}\right)}. \end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 2.24

Reduza $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{18}}}$.

Questão 2.25

Simplifique $\sqrt[3]{\frac{a^3 b}{a^2 b^5}} \cdot \sqrt[6]{a^{30} b^{43}}$.

Questão 2.26

Simplifique $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{x^5}}{x^4}}}{x^3}} \cdot x^2$.

Questão 2.27

Simplifique $\sqrt[5]{x^2} \sqrt[3]{x^4} \sqrt{x^7} + \sqrt{\frac{4\sqrt[5]{x^6}}{x^2}}$.

Questão 2.28 (*)

Determine o valor de n , tal que $\sqrt[n]{\frac{x^n}{x^{-2}}} = x^{(2^{100}-101)}$.

a) 102

b) 101

c) 100

d) 99

e) 98

Questão 2.29 (*)

Sendo n um número ímpar, simplifique $\sqrt[n]{\frac{x^n}{x^{2!}}}$.

a) 1

b) $x^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ c) x^n d) x^{-n} e) x

(*) Observação: Use $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{rq[(n-1) \cdot q^n - n \cdot q^{n-1} + 1]}{(q-1)^2}$ nas questões

2.28 e 2.29.

A partir de agora veremos várias séries finitas. Atenção aos raciocínios das demonstrações, pois dão uma visão além do alcance. Vejamos!

2.4) Séries Finitas de Radicais:

Nesta seção, veremos as séries finitas de radicais. São séries que facilitam muitos cálculos e são ferramentas rápidas e eficazes na hora da prova.

S1. Multiplicação de Raízes na Forma 2^m .

Esta primeira série aborda produto de radicais cujas potências aumentam em PG, o resultado é a raiz de índice da potência 2^m , e o radicando é a soma de uma PG.

$$\overbrace{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}^{\text{"m" vezes}} = 2^m \sqrt{a^{2^m-1}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} E &= \overbrace{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}^{\text{"m" vezes}} \Rightarrow E = \overbrace{\sqrt{a}\sqrt{a \cdot a^2}}^{\text{"m" vezes}} \Rightarrow E = \overbrace{\sqrt{\sqrt{a} \cdot a^2 \cdot a^4} \dots}^{\text{"m" vezes}} \\ \Rightarrow E &= \overbrace{\sqrt{\sqrt{a^{1+2+4 \dots + 2^m}}}}^{\text{"m" vezes}} \Rightarrow E = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}{2^m} \sqrt{a^{1+2+4 \dots + 2^m}} \Rightarrow E = 2^m \sqrt{a^{\frac{2^m-1}{2-1}}} \\ \therefore \overbrace{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}^{\text{"m" vezes}} &= 2^m \sqrt{a^{2^m-1}} \end{aligned}$$

Generalização:

$$\overbrace{\sqrt{a^n}\sqrt{a^n}\sqrt{a^n}\sqrt{a^n}}^{\text{"m" vezes}} = 2^m \sqrt{a^{n \cdot (2^m-1)}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} E &= \overbrace{\sqrt{a^n}\sqrt{a^n}\sqrt{a^n}}^{\text{"m" vezes}} \Rightarrow E = \overbrace{\sqrt{a^n}\sqrt{a^n \cdot a^{2n}}}^{\text{"m" vezes}} \Rightarrow E = \overbrace{\sqrt{\sqrt{a^n} \cdot a^{2n} \cdot a^{4n}} \dots}^{\text{"m" vezes}} \\ \Rightarrow E &= \overbrace{\sqrt{\sqrt{a^{n \cdot (1+2+4 \dots + 2^m)}}}}^{\text{"m" vezes}} \Rightarrow E = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}{2^m} \sqrt{a^{n \cdot (1+2+4 \dots + 2^m)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[n]{a \cdot \left(\frac{2^m-1}{2-1}\right)} \quad \therefore \boxed{\begin{array}{c} \text{"m" vezes} \\ \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[n]{a \cdot (2^m-1)} \end{array}}$$

Exemplo Resolvido 51: Mostre que $\sqrt[10]{3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}} = 3^{\left(\frac{1023}{1024}\right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[10]{3\sqrt{3}\sqrt{3}} \Rightarrow E = \sqrt[2^{10}]{3^{2^{10}-1}} \Rightarrow E = 3^{\left(\frac{2^{10}-1}{2^{10}}\right)} \Rightarrow E = 3^{\left(\frac{1024-1}{1024}\right)}$$

$$\therefore \sqrt[10]{3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}} = 3^{\left(\frac{1023}{1024}\right)}.$$

Exemplo Resolvido 52: Mostre que $\sqrt[25]{16\sqrt{16}\sqrt{16}\sqrt{16}} = 2^{\left(\frac{2^{25}-1}{2^{23}}\right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[25]{16\sqrt{16}\sqrt{16}} \Rightarrow E = \sqrt[2^{25}]{16^{2^{25}-1}} \Rightarrow E = 16^{\left(\frac{2^{25}-1}{2^{25}}\right)} \Rightarrow E = \left(2^4\right)^{\left(\frac{2^{25}-1}{2^{25}}\right)}$$

$$\Rightarrow E = 2^{2^2 \cdot \left(\frac{2^{25}-1}{2^{25}}\right)} \Rightarrow E = 2^{2^2 \cdot \left(\frac{2^{25}-1}{2^2 \cdot 2^{23}}\right)} \therefore \sqrt[25]{16\sqrt{16}\sqrt{16}\sqrt{16}} = 2^{\left(\frac{2^{25}-1}{2^{23}}\right)}.$$

S2. Multiplicação de Raízes na Forma m^n .

Esta série é uma generalização da série anterior, o resultado segue o mesmo raciocínio.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{"n" vezes} \\ \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[m]{a \cdot \left(\frac{m^n-1}{m-1}\right)} \end{array}}$$

Demonstração:

$$E = \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m}} \Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m} \cdot a^m} \Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{a^m} \cdot a^m \cdot a^{m^2} \dots}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a^{1+m+m^2+\dots}}}}} \Rightarrow E = \sqrt[m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m]{a^{1+m+m^2+\dots+m^n}}$$

$$E = \sqrt[n]{a^{\frac{m^n - 1}{m - 1}}} \quad \text{ou} \quad E = a^{\left[\frac{m^n - 1}{m - 1} \right]} \quad \text{ou} \quad E = a^{\left[\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m^n \cdot (m-1)} \right]}$$

Generalização:

$$\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \dots \sqrt[n]{a^n} \text{ ("n" vezes)} = \sqrt[n]{a^{n \cdot \left(\frac{m^n - 1}{m - 1} \right)}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \dots \sqrt[n]{a^n} \text{ ("n" vezes)} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^n \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \dots \sqrt[n]{a^n} \text{ ("n" vezes)}} \\ &\Rightarrow E = \sqrt[n]{a^n \cdot a^{nm} \cdot a^{nm^2} \dots} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^{n(1+m+m^2+\dots+m^n)}} \\ &\Rightarrow E = \sqrt[n]{a^{n(1+m+m^2+\dots+m^n)}} \quad \therefore E = \sqrt[n]{a^{n \cdot \left(\frac{m^n - 1}{m - 1} \right)}} \\ &\text{ou } E = a^{\left[\frac{n \cdot (m^n - 1)}{m^n \cdot (m - 1)} \right]} \quad \text{ou } E = a^{\left[\frac{n}{m-1} - \frac{n}{m^n \cdot (m-1)} \right]} \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 53: Efetue $\sqrt[5]{5 \sqrt[5]{5 \sqrt[5]{5}}}$ ("5" vezes)

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[5]{5 \sqrt[5]{5 \sqrt[5]{5}}} \Rightarrow E = \sqrt[5]{5^{\left(\frac{5^5 - 1}{5 - 1} \right)}} \Rightarrow E = \sqrt[5]{5^{\left(\frac{5^5 - 1}{4} \right)}} \therefore E = 5^{\left(\frac{5^5 - 1}{4 \cdot 5^5} \right)}$$

Exemplo Resolvido 54: Efetue $\sqrt[10]{7 \sqrt[10]{7 \sqrt[10]{7}}}$ ("16" vezes)

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[10]{7 \sqrt[10]{7 \sqrt[10]{7}}} \Rightarrow E = \sqrt[10]{7^{\left(\frac{10^{16} - 1}{10 - 1} \right)}} \Rightarrow E = \sqrt[10]{7^{\left(\frac{10^{16} - 1}{9} \right)}}$$

$$\therefore \sqrt[16]{10 \sqrt[10]{7 \sqrt[10]{7 \sqrt[10]{7}}}} = 7^{\left(\frac{10^{16}-1}{9 \cdot 10^{16}}\right)}.$$

S3. Divisão de Raízes na Forma 2^m .

Esta série é com divisão, em vez de produto, segue o mesmo raciocínio das séries anteriores.

$$\sqrt[m]{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}} = 2^m \sqrt[m]{a \frac{1 - (-2)^m}{3}}$$

Demonstração:

$$E = \sqrt[m]{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}} \Rightarrow E = \sqrt[m]{a + \sqrt{a + a^2}} \Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt{a + a^2 + a^4} \dots}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt{a^{1-2+4-\dots+(-2)^m}}} \Rightarrow E = \sqrt[m]{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_m \sqrt{a^{1-2+4-\dots+(-2)^m}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[m]{a \frac{(-2)^m - 1}{(-2) - 1}} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}} = 2^m \sqrt[m]{a \left(\frac{1 - (-2)^m}{3} \right)}$$

$$\therefore \begin{cases} \sqrt[m]{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}} = 2^m \sqrt[m]{a \left(\frac{1 - 2^m}{3} \right)} & ; \text{ se } m \text{ for par.} \\ \sqrt[m]{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}} = 2^m \sqrt[m]{a \left(\frac{1 + 2^m}{3} \right)} & ; \text{ se } m \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Generalização:

$$\sqrt[n]{\sqrt{a^n + \sqrt{a^n + \sqrt{a^n}}}} = 2^m \sqrt[n]{a \left(\frac{1 - (-2)^m}{3} \right)}$$

Demonstração:

$$E = \sqrt[n]{\sqrt{a^n + \sqrt{a^n + \sqrt{a^n}}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^n + \sqrt{a^n + a^{2n}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^n \div a^{2n} \div a^{4n} \dots}} \Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^n \cdot (1 - 2 + 4 - \dots + (-2)^m)}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[m]{\sqrt[m]{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2} \cdot a^n \cdot (1 - 2 + 4 - \dots + (-2)^m)} \Rightarrow E = \sqrt[m]{a^n \cdot \frac{(-2)^m - 1}{(-2) - 1}}$$

$$\therefore \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n}}} = \sqrt[m]{a^n \cdot \frac{1 - (-2)^m}{3}}$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n}}} = \sqrt[m]{a^n \cdot \frac{1 - 2^m}{3}}; \text{ se } m \text{ for par.} \\ \sqrt[m]{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n}}} = \sqrt[m]{a^n \cdot \frac{1 + 2^m}{3}}; \text{ se } m \text{ for impar.} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n}}} = \sqrt[m]{a^n \cdot \frac{1 + 2^m}{3}}; \text{ se } m \text{ for impar.}$$

$$\text{Exemplo Resolvido 55: } \sqrt[8]{\sqrt[8]{\sqrt[8]{3 \div \sqrt[8]{3 \div \sqrt[8]{3}}}} = a^{\left(\frac{1 - 2^8}{3 \cdot 2^8}\right)}$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[8]{\sqrt[8]{\sqrt[8]{3 \div \sqrt[8]{3 \div \sqrt[8]{3}}}} \Rightarrow E = \sqrt[8]{3^{\frac{1 - (-2)^8}{3}}} \Rightarrow E = \sqrt[8]{3^{\frac{1 - 2^8}{3}}} \therefore E = 3^{\left(\frac{1 - 2^8}{3 \cdot 2^8}\right)}$$

$$\text{Exemplo Resolvido 56: } \sqrt[9]{\sqrt[9]{\sqrt[9]{5 \div \sqrt[9]{5 \div \sqrt[9]{5}}}} = 5^{\left(\frac{1 + 2^9}{3 \cdot 2^9}\right)}$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[9]{\sqrt[9]{\sqrt[9]{5 \div \sqrt[9]{5 \div \sqrt[9]{5}}}} \Rightarrow E = \sqrt[9]{5^{\frac{1 - (-2)^9}{3}}} \Rightarrow E = \sqrt[9]{5^{\frac{1 + 2^9}{3}}} \therefore E = 5^{\left(\frac{1 + 2^9}{3 \cdot 2^9}\right)}$$

S4. Divisão de Raízes na Forma m^n .

Essa série é uma generalização da série anterior, o resultado segue o mesmo raciocínio.

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a}}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1 - (-m)^n}{m + 1}}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}}} + a^{m^2} \dots} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{1-m+m^2-\dots+(-m)^n}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^{1-m+m^2-\dots+(-m)^n}} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[n]{a^{\frac{(-m)^n - 1}{(-m) - 1}}} \Rightarrow \sqrt[n]{a^{\frac{1 - (-m)^n}{m + 1}}} \\
 \therefore \begin{cases} \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1 - m^n}{m + 1}}} & ; \text{ se } n \text{ for par} \\ \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1 + m^n}{m + 1}}} & ; \text{ se } n \text{ for ímpar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Generalização:

$$\sqrt[n]{a^n + \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n]{a^n}}} = \sqrt[n]{a^{n \cdot \frac{1 - (-m)^n}{m + 1}}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n]{a^n}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n]{a^n + a^{nm}}} \Rightarrow \\
 E &= \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^n + a^{nm}} + a^{nm^2} \dots}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n(1-m+m^2-\dots+(-m)^n)}}}} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[n]{a^{n \cdot \frac{1 - m + m^2 - \dots + (-m)^n}{m + 1}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^{n \cdot \frac{(-m)^n - 1}{(-m) - 1}}} \\
 \therefore \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n]{a^n}}} &= \sqrt[n]{a^{n \cdot \frac{1 - (-m)^n}{m + 1}}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \overbrace{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n} \div \sqrt[m]{a^n}}}^{\text{"n" vezes}} = \sqrt[m]{a^{n \cdot \left(\frac{1-m^n}{m+1}\right)}}; \text{ se n for par.} \\ \overbrace{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n} \div \sqrt[m]{a^n}}}^{\text{"n" vezes}} = \sqrt[m]{a^{n \cdot \left(\frac{1+m^n}{m+1}\right)}}; \text{ se n for ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo Resolvido 57: Mostre que $\overbrace{\sqrt[10]{a \div \sqrt[10]{a} \div \sqrt[10]{a}}}^{\text{"2n" vezes}} = a^{\left(\frac{1-10^{2n}}{11 \cdot 10^{2n}}\right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E = \overbrace{\sqrt[10]{a \div \sqrt[10]{a} \div \sqrt[10]{a}}}^{\text{"2n" vezes}} &\Rightarrow E = \sqrt[10^{2n}]{a^{\left(\frac{1-(-10)^{2n}}{10+1}\right)}} \Rightarrow E = \sqrt[10^{2n}]{a^{\left(\frac{1-10^{2n}}{11}\right)}} \\ \Rightarrow E &= a^{\left(\frac{1}{10^{2n}} \cdot \frac{1-10^{2n}}{11}\right)} \Rightarrow \overbrace{\sqrt[10]{a \div \sqrt[10]{a} \div \sqrt[10]{a}}}^{\text{"2n" vezes}} = a^{\left(\frac{1-10^{2n}}{11 \cdot 10^{2n}}\right)}. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 58: Mostre que $\overbrace{\sqrt[6]{x \div \sqrt[6]{x} \div \sqrt[6]{x}}}^{\text{"2n-1" vezes}} = x^{\left(\frac{1+6^{2n-1}}{7 \cdot 6^{2n-1}}\right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E = \overbrace{\sqrt[6]{x \div \sqrt[6]{x} \div \sqrt[6]{x}}}^{\text{"2n-1" vezes}} &= \sqrt[6^{2n-1}]{x^{\left(\frac{1+6^{2n-1}}{6+1}\right)}} = \sqrt[6^{2n-1}]{x^{\left(\frac{1+6^{2n-1}}{7}\right)}} \\ E &= x^{\left(\frac{1}{6^{2n-1}} \cdot \frac{1+6^{2n-1}}{7}\right)} = \overbrace{\sqrt[6]{x \div \sqrt[6]{x} \div \sqrt[6]{x}}}^{\text{"2n-1" vezes}} = x^{\left(\frac{1+6^{2n-1}}{7 \cdot 6^{2n-1}}\right)}. \end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 2.30

Efetue $E = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x^2} \cdot \sqrt[n]{x^3} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{x^n}$.

Questão 2.31

Qual o valor de $E = \sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[5]{3^8} \cdot \sqrt[5]{3^{16}}$?

Questão 2.32

Qual o valor de $E = \sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{2^3} \cdot \sqrt[10]{2^5} \cdot \sqrt[10]{2^7} \cdot \dots \cdot \sqrt[10]{2^{99}}$?

Questão 2.33

Qual o valor de $\sqrt{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2 \sqrt[5]{2}}}}$?

Questão 2.34

Efetue $\sqrt[6]{7 \sqrt[5]{7 \sqrt[4]{7 \sqrt[3]{7 \sqrt{7}}}}}$.

Questão 2.35

Se $x \neq 0$ e n é um número par, determine

$$\frac{\sqrt[n]{x \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x}}}}} \cdot \sqrt[n]{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \sqrt{x}}}}}{\sqrt[n]{x}}$$

a) $x^{\frac{2(2^n - 1)}{3}}$

b) $x^{\frac{3(1 - 2^{-n})}{2}}$

c) $x^{\frac{4(1 - 2^{-n})}{3}}$

d) $x^{\frac{2(1 + 2^{-n})}{3}}$

e) $x^{1 + 2^n}$

Questão 2.36

Qual o valor de $\sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \dots \sqrt[3]{x^2}}}}}$?

"n" radicais

Questão 2.37

Qual o valor de $\underbrace{\sqrt[4]{x^3} \sqrt[4]{x^3} \sqrt[4]{x^3} \sqrt[4]{x^3} \dots \sqrt[4]{x^3}}_{\text{"n" radicais}} ?$

Questão 2.38

Qual o valor de $\underbrace{\sqrt[6]{x^5} \sqrt[6]{x^5} \sqrt[6]{x^5} \sqrt[6]{x^5} \dots \sqrt[6]{x^5}}_{\text{"n" radicais}} ?$

Questão 2.39

Qual o valor de $\underbrace{\sqrt[10]{x^9} \sqrt[10]{x^9} \sqrt[10]{x^9} \sqrt[10]{x^9} \dots \sqrt[10]{x^9}}_{\text{"n" radicais}} ?$

Questão 2.40

Simplifique $\sqrt{x} \sqrt{x^2} \sqrt{x^3} \sqrt{x^4} \dots \sqrt{x^x} .$

Questão 2.41

Qual o valor de $\underbrace{\sqrt[3^2]{x^{2^3}} \sqrt[3^2]{x^{2^3}} \sqrt[3^2]{x^{2^3}} \sqrt[3^2]{x^{2^3}} \dots \sqrt[3^2]{x^{2^3}}}_{\text{"n" radicais}} ?$

Questão 2.42

Determine o valor de $\sqrt{x^n} \sqrt{x^{n-1}} \sqrt{x^{n-2}} \dots \sqrt{x^3} \sqrt{x^2} \sqrt{x} .$

- a) $x^{(n-2)+2 \dots n}$
 b) $x^{(n-1)+2 \dots n}$
 c) $x^{n+2 \dots n}$
 d) $x^{(n+1)+2 \dots n}$

Dica: Soma dos termos de uma P.A.

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{rq[(n-1) \cdot q^n - n \cdot q^{n-1} + 1]}{(q-1)^2}$$

A partir de agora, veremos as séries infinitas. Atenção aos raciocínios que aumentam a visão do leitor. Venha comigo!

2.5) Séries Infinitas:

Nesta seção, veremos as séries infinitas de radicais, cujos raciocínios fornecem uma boa maturidade para quem os estuda. São séries que facilitam muitos cálculos e são ferramentas rápidas e eficazes na hora da prova, vejamos.

S1. Radicais em Soma:

Aqui veremos as séries em soma, acompanhe cada caso com atenção.

a) Soma de Radicais Simples:

$$\boxed{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}} \Rightarrow x^2 = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}} \Rightarrow x^2 = a + x \\ \Rightarrow x^2 - x - a &= 0; \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) \Rightarrow \Delta = 1 + 4a; \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 + 4a}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}$$

b) Soma de Radicais com Termo Fora da Raiz:

$$\boxed{\sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + \dots \infty}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + \dots \infty}}} \Rightarrow x^2 = a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + \dots \infty}} \Rightarrow x^2 = a + bx \\ \Rightarrow x^2 - bx - a &= 0; \Rightarrow \Delta = (-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) \therefore \Delta = b^2 + 4a; \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-b) \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + \dots \infty}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}}$$

c) Soma de Radicais com Termos em Produto:

$$\sqrt{ab + b\sqrt{ab + b\sqrt{ab + \dots\infty}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ab}}{2}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{ab + b\sqrt{ab + b\sqrt{ab + \dots\infty}}} \Rightarrow x^2 = ab + b\sqrt{ab + b\sqrt{ab + \dots\infty}}$$

$$\Rightarrow x^2 = ab + bx \Rightarrow x^2 - bx - ab = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = (-b)^2 - 4.1.(-ab) \Rightarrow \Delta = b^2 + 4ab$$

$$x = \frac{-(-b) \pm \sqrt{b^2 + 4ab}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ab}}{2} \therefore x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ab}}{2}$$

$$\therefore \sqrt{ab + b\sqrt{ab + b\sqrt{ab + \dots\infty}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ab}}{2}; \forall ab \in \mathbb{R}_+^*$$

d) Soma com Termos em Produto e um Termo Fora da Raiz:

$$\sqrt{ac + b\sqrt{ac + b\sqrt{ac + \dots\infty}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{ac + b\sqrt{ac + b\sqrt{ac + \dots\infty}}} \Rightarrow x^2 = ac + b\sqrt{ac + b\sqrt{ac + \dots\infty}}$$

$$\Rightarrow x^2 = ac + bx \Rightarrow x^2 - bx - ac = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = (-b)^2 - 4.1.(-ac) \Rightarrow \Delta = b^2 + 4ac$$

$$\therefore x = \frac{-(-b) \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2} \therefore x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}$$

$$\therefore \sqrt{ac + b\sqrt{ac + b\sqrt{ac + \dots\infty}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}; \forall ac \in \mathbb{R}_+^*$$

e) Soma com Produto de Termos Consecutivos:

$$\sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1) + \dots\infty}}} = a+1$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1) + \dots\infty}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1) + \sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1)} + \dots$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1) + x \Rightarrow x^2 - x - a(a+1) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-a(a+1)] \Rightarrow \Delta = 1 + 4a^2 + 4a \therefore \Delta = (1+2a)^2;$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1+2a)^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{1+1+2a}{2} \Rightarrow x = \frac{2+2a}{2} \therefore x = 1+a$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1)} + \dots = a+1}; \quad \forall a(a+1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

f) Soma com Produto de Três Termos Consecutivos:

$$\boxed{\sqrt{a(a+1)(a+2)} + \sqrt{a(a+1)(a+2)} + \dots = \frac{1 + \sqrt{1+4a(a+1)(a+2)}}{2}}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a(a+1)(a+2)} + \sqrt{a(a+1)(a+2)} + \sqrt{a(a+1)(a+2)} + \dots$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1)(a+2) + \sqrt{a(a+1)(a+2)} + \sqrt{a(a+1)(a+2)} + \dots$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1)(a+2) + x \Rightarrow x^2 - x - a(a+1)(a+2) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-a(a+1)(a+2)] \therefore \Delta = 1 + 4a(a+1)(a+2);$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1+4a(a+1)(a+2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1+4a(a+1)(a+2)}}{2}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a(a+1)(a+2)} + \sqrt{a(a+1)(a+2)} + \dots = \frac{1 + \sqrt{1+4a(a+1)(a+2)}}{2}};$$

g) Soma de Termos Consecutivos e com Termo Fora da Raiz.

$$\boxed{\sqrt{a(a+1)} + (a-2) + \sqrt{a(a+1)} + (a-2) + \sqrt{a(a+1)} + \dots = \frac{(a-2) + \sqrt{5a^2+4}}{2}}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a(a+1)} + (a-2) + \sqrt{a(a+1)} + (a-2) + \sqrt{a(a+1)} + \dots$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1) + (a-2)\sqrt{a(a+1) + (a-2)\sqrt{a(a+1) + \dots\infty}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1) + (a-2)x \Rightarrow x^2 - (a-2)x - a(a+1) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = [-(a-2)]^2 - 4.1.[-a(a+1)] \Rightarrow \Delta = (a-2)^2 + 4a(a+1)$$

$$\Rightarrow \Delta = a^2 - 4a + 4 + 4a^2 + 4a \therefore \Delta = 5a^2 + 4;$$

$$x = \frac{-[-(a-2)] \pm \sqrt{5a^2 + 4}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{(a-2) + \sqrt{5a^2 + 4}}{2}$$

$$\therefore \sqrt{a(a+1) + (a-2)\sqrt{a(a+1) + \dots\infty}} = \frac{(a-2) + \sqrt{5a^2 + 4}}{2};$$

$$\forall a(a+1), (a-2) \in \mathbb{R}_+^*.$$

h) Soma interessante:

$$\sqrt{a(2a+1) + (a+1)\sqrt{a(2a+1) + (a+1)\sqrt{a(2a+1) + \dots\infty}}} = 2a+1$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a(2a+1) + (a+1)\sqrt{a(2a+1) + (a+1)\sqrt{a(2a+1) + \dots\infty}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(2a+1) + (a+1)\sqrt{a(2a+1) + (a+1)\sqrt{a(2a+1) + \dots\infty}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(2a+1) + (a+1)x \Rightarrow x^2 - (a+1)x - a(2a+1) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = [-(a+1)]^2 - 4.1.[-a(2a+1)] \Rightarrow \Delta = a^2 + 2a + 1 + 8a^2 + 4a$$

$$\Rightarrow \Delta = 9a^2 + 6a + 1 \therefore \Delta = (3a+1)^2;$$

$$x = \frac{-[-(a+1)] \pm \sqrt{(3a+1)^2}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{a+1+3a+1}{2} \therefore \boxed{x = 2a+1}.$$

i) Soma com Inverso do Produto Consecutivo:

$$\sqrt{a(a-1) + \sqrt{a(a-1) + \sqrt{a(a-1) + \dots\infty}}} = a; \forall a(a-1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a(a-1) + \sqrt{a(a-1) + \sqrt{a(a-1) + \dots\infty}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a-1) + \sqrt{a(a-1)} + \sqrt{a(a-1)} + \dots \infty$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a-1) + x \Rightarrow x^2 - x - a(a-1) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-a(a-1)] \Rightarrow \Delta = 1 + 4a^2 - 4a \therefore \Delta = (2a-1)^2;$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(2a-1)^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{1+2a-1}{2} \Rightarrow x = \frac{2a}{2} \therefore x = a.$$

$$\therefore \sqrt{a(a-1)} + \sqrt{a(a-1)} + \sqrt{a(a-1)} + \dots \infty = a; \forall a(a-1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

j) Soma com Termos em PA:

$$\sqrt{a^2 + b} \sqrt{a^2 + (a+b)} \sqrt{a^2 + (2a+b)} \sqrt{\dots \infty} = a + b$$

Demonstração:

$$a + b = \sqrt{(a+b)^2} \Rightarrow a + b = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \Rightarrow a + b = \sqrt{a^2 + b(2a+b)}$$

$$*2a + b = \sqrt{(2a+b)^2} \Rightarrow 2a + b = \sqrt{[a + (a+b)]^2}$$

$$\Rightarrow 2a + b = \sqrt{a^2 + 2a(a+b) + (a+b)^2}$$

$$\Rightarrow 2a + b = \sqrt{a^2 + (a+b)(2a+a+b)} \Rightarrow 2a + b = \sqrt{a^2 + (a+b)(3a+b)}$$

$$**3a + b = \sqrt{(3a+b)^2} \Rightarrow 3a + b = \sqrt{[a + (2a+b)]^2}$$

$$\Rightarrow 3a + b = \sqrt{a^2 + 2a(2a+b) + (2a+b)^2}$$

$$\Rightarrow 3a + b = \sqrt{a^2 + (2a+b)(2a+2a+b)}$$

$$\Rightarrow 3a + b = \sqrt{a^2 + (2a+b)(4a+b)} \dots$$

Logo, temos:

$$a + b = \sqrt{a^2 + b(2a+b)} \Rightarrow a + b = \sqrt{a^2 + b\sqrt{a^2 + (a+b)(3a+b)}}$$

$$\Rightarrow a + b = \sqrt{a^2 + b\sqrt{a^2 + (a+b)\sqrt{a^2 + (2a+b)(4a+b)}} \dots}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a^2 + b} \sqrt{a^2 + (a+b)} \sqrt{a^2 + (2a+b)} \sqrt{\dots} = a+b}.$$

Exemplo Resolvido 59: Efetue $\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots}} &\Rightarrow E = \frac{1+\sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} \Rightarrow E = \frac{1+\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow E = \frac{1+\sqrt{9}}{2} \\ &\Rightarrow E = \frac{1+3}{2} \therefore \sqrt{2+\sqrt{2+\dots}} = 2. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 60: Qual o valor de $\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+\dots}}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E = \sqrt{4+3\sqrt{4+\dots}} &\Rightarrow E = \frac{3+\sqrt{3^2+4 \cdot 4}}{2} \Rightarrow E = \frac{3+\sqrt{9+16}}{2} \\ &\Rightarrow E = \frac{3+\sqrt{25}}{2} \Rightarrow E = \frac{3+5}{2} \Rightarrow E = \frac{8}{2} \Rightarrow E = 4. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 61: Qual o valor de $\sqrt{12+4\sqrt{12+\dots}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E = \sqrt{12+4\sqrt{12+\dots}} &\Rightarrow E = \sqrt{3 \cdot 4 + 4\sqrt{3 \cdot 4 + \dots}} \\ &\Rightarrow E = \frac{4+\sqrt{4^2+4 \cdot 3 \cdot 4}}{2} \Rightarrow E = \frac{4+\sqrt{16+48}}{2} \Rightarrow E = \frac{4+\sqrt{64}}{2} \\ &\Rightarrow E = \frac{4+8}{2} \Rightarrow E = \frac{12}{2} \therefore \sqrt{12+4\sqrt{12+\dots}} = 6. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 62: Efetue $\sqrt{3 \cdot 8 + 5\sqrt{3 \cdot 8 + \dots}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E = \sqrt{3 \cdot 8 + 5\sqrt{3 \cdot 8 + \dots}} &\Rightarrow E = \frac{5+\sqrt{5^2+4 \cdot 3 \cdot 8}}{2} \Rightarrow E = \frac{5+\sqrt{25+96}}{2} \\ &\Rightarrow E = \frac{5+\sqrt{121}}{2} \Rightarrow E = \frac{5+11}{2} \Rightarrow E = \frac{16}{2} \therefore \sqrt{3 \cdot 8 + 5\sqrt{3 \cdot 8 + \dots}} = 8. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 63: Qual o valor de $\sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots\infty}}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots\infty}}} \Rightarrow E = \sqrt{6 \cdot 7 + \sqrt{6 \cdot 7 + \sqrt{6 \cdot 7 + \dots\infty}}} \\ \Rightarrow E = 6 + 1 \therefore \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots\infty}}} = 7.$$

Exemplo Resolvido 64: Efetue $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 + \dots\infty}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 + \dots\infty}} \\ \Rightarrow E = \sqrt{2(1+1)(1+2) + \sqrt{2(1+1)(1+2) + \dots\infty}} \\ \Rightarrow E = \frac{1 + \sqrt{1+4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}}{2} \Rightarrow E = \frac{1 + \sqrt{1+48}}{2} \Rightarrow E = \frac{1 + \sqrt{49}}{2} \\ \Rightarrow E = \frac{1+7}{2} \Rightarrow E = \frac{8}{2} \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 + \dots\infty}} = 4.$$

Exemplo Resolvido 65: Efetue $\sqrt{72 + 6\sqrt{72 + 6\sqrt{72 + 6\dots\infty}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{72 + 6\sqrt{72 + 6\sqrt{72 + 6\dots\infty}}} \Rightarrow E = \sqrt{8 \cdot 9 + 6\sqrt{8 \cdot 9 + 6\sqrt{8 \cdot 9 + 6\dots\infty}}} \\ \Rightarrow E = \sqrt{8(8+1) + (8-2)\sqrt{8(8+1) + \dots\infty}} \Rightarrow E = \frac{(8-2) + \sqrt{5 \cdot 8^2 + 4}}{2} \\ \Rightarrow E = \frac{6 + \sqrt{320 + 4}}{2} \Rightarrow E = \frac{6 + \sqrt{324}}{2} \Rightarrow E = \frac{6 + 18}{2} \therefore E = 12.$$

Exemplo Resolvido 66: Efetue $\sqrt{210 + 11\sqrt{210 + 11\sqrt{\dots\infty}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{210 + 11\sqrt{210 + 11\sqrt{\dots\infty}}} = \sqrt{10(21) + 11\sqrt{10(2 \cdot 10 + 1) + 11\sqrt{\dots\infty}}} \\ E = \sqrt{10(2 \cdot 10 + 1) + (10+1)\sqrt{10(2 \cdot 10 + 1) + \dots\infty}} = 2 \cdot 10 + 1 \therefore \boxed{E = 21}.$$

Exemplo Resolvido 67: Qual o valor de $\sqrt{12 \cdot 11 + \sqrt{12 \cdot 11 + \dots \infty}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt{12 \cdot 11 + \sqrt{12 \cdot 11 + \dots \infty}} = \sqrt{12 \cdot (12-1) + \sqrt{12 \cdot (12-1) + \dots \infty}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{12 \cdot 11 + \sqrt{12 \cdot 11 + \dots \infty}} = 12.$$

Exemplo Resolvido 68: Qual o valor de $\sqrt{9 + 7\sqrt{9 + 10\sqrt{9 + 13\sqrt{\dots \infty}}}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{9 + 7\sqrt{9 + 10\sqrt{9 + 13\sqrt{\dots \infty}}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{3^2 + 7\sqrt{3^2 + (3+7)\sqrt{3^2 + (2 \cdot 3 + 7)\sqrt{\dots \infty}}}} \Rightarrow E = 3 + 7$$

$$\therefore \sqrt{9 + 7\sqrt{9 + 10\sqrt{9 + 13\sqrt{\dots \infty}}}} = 10.$$

Problemas Propostos

Questão 2.43 (AHSME-1954/Stanford-2010)

Se $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$, então:

- a) $x = 1$ b) $0 < x < 1$
 c) $1 < x < 2$ d) infinito
 e) $x > 2$, mas finito

Questão 2.44 (Harvard-MIT-2000)

Qual o valor de $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}}$?

Questão 2.45 (Harvard-MIT-2000)

Qual o valor de $\sqrt{16 + 3\sqrt{16 + 7\sqrt{16 + 11\sqrt{16 + 15\sqrt{16 + \dots}}}}}$?

Questão 2.46

Qual o valor de $\sqrt{9+2\sqrt{9+5\sqrt{9+8\sqrt{9+11\sqrt{9+\dots}}}}}$?

Questão 2.47

Qual o valor de $\sqrt{16+\sqrt{16+5\sqrt{16+9\sqrt{16+13\sqrt{16+\dots}}}}}$?

Questão 2.48

Qual o valor de $\sqrt{a+2\sqrt{a+2\sqrt{a+\dots}}}$?

Questão 2.49

Qual o valor de $\sqrt{24+2\sqrt{24+2\sqrt{24+\dots}}}$?

Questão 2.50

Qual o valor de $\sqrt{2012+\sqrt{2012+\sqrt{2012+\dots}}}$?

Questão 2.51

Qual o valor de

$$\sqrt{ax+(n+a)^2} + x\sqrt{a(x+n)+(n+a)^2} + (x+n)\sqrt{a(x+2n)+(n+a)^2} + (x+2n)\sqrt{\dots}$$

Questão 2.52

Qual o valor de $\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\dots}}}$?

S2. Radicais em Diferença:**a) Diferença de Radicais Simples:**

$$\boxed{\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots\infty}}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots\infty}}} \Rightarrow x^2 = a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots\infty}} \Rightarrow x^2 = a - x$$

$$\Rightarrow x^2 + x - a = 0; \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) \Rightarrow \Delta = 1 + 4a;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots\infty}}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}}.$$

b) Diferença de Termos Consecutivos:

$$\boxed{\sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \dots\infty}}} = a}; \forall a(a+1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \dots\infty}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \dots\infty}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a+1) - x \Rightarrow x^2 + x - a(a+1) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-a(a+1)] \Rightarrow \Delta = 1 + 4a^2 + 4a \therefore \Delta = (1+2a)^2;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1+2a)^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-1 + 1 + 2a}{2} \Rightarrow x = \frac{2a}{2} \therefore x = a.$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \dots\infty}}} = a}; \forall a(a+1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

c) Diferença do Inverso de Termos Consecutivos:

$$\boxed{\sqrt{a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \dots\infty}}} = a-1}; \forall a(a-1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \sqrt{\dots\infty}}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \sqrt{\dots\infty}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a-1) - x \Rightarrow x^2 + x - a(a-1) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-a(a-1)] \Rightarrow \Delta = 1 + 4a^2 - 4a \therefore \Delta = (2a-1)^2;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a-1)^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-1 + 2a - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{2a - 2}{2} \therefore x = a - 1.$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \sqrt{a(a-1) - \sqrt{\dots\infty}}} = a - 1}; \forall a(a-1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

d) Diferença interessante:

$$\boxed{\sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{\dots\infty} = a - 1}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{\dots\infty}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2a(a-1) - (a+1) \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{\dots\infty}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2a(a-1) - (a+1)x \Rightarrow x^2 + (a+1)x - 2a(a-1) = 0;$$

$$\Rightarrow \Delta = (a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-2a(a-1)] \Rightarrow \Delta = a^2 + 2a + 1 + 8a^2 - 8a$$

$$\Rightarrow \Delta = 9a^2 - 6a + 1 \therefore \Delta = (3a-1)^2; \Rightarrow x = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{(3a-1)^2}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-a-1+3a-1}{2} \Rightarrow x = \frac{2a-2}{2} \therefore x = a-1.$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{2a(a-1) - (a+1)} \sqrt{\dots\infty} = a - 1}; \forall a(a-1) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exemplo Resolvido 69: Qual o valor de $\sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots\infty}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots\infty}} &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 20}}{2} \Rightarrow \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots\infty}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 80}}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots\infty}} &= \frac{-1 + \sqrt{81}}{2} \Rightarrow \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots\infty}} = \frac{-1 + 9}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots\infty}} &= \frac{8}{2} \Rightarrow \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots\infty}} = 4.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 70: Efetue $\sqrt{5 \cdot 6 - \sqrt{5 \cdot 6 - \sqrt{5 \cdot 6 - \dots\infty}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{5 \cdot 6 - \sqrt{5 \cdot 6 - \dots\infty}} &= \sqrt{5 \cdot (5 + 1) - \sqrt{5 \cdot (5 + 1) - \sqrt{5 \cdot (5 + 1) - \dots\infty}}} \\ \therefore \sqrt{5 \cdot 6 - \sqrt{5 \cdot 6 - \sqrt{5 \cdot 6 - \dots\infty}}} &= 5.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 71: Qual o valor de $\sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{\dots\infty}}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{\dots\infty}}} &= \sqrt{100(100 - 1) - \sqrt{100(100 - 1) - \sqrt{\dots\infty}}} \\ \Rightarrow \sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{\dots\infty}}} &= 100 - 1 \\ \Rightarrow \sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{100 \cdot 99 - \sqrt{\dots\infty}}} &= 99.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 72: Efetue $\sqrt{12 - 4\sqrt{12 - 4\sqrt{\dots\infty}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{12 - 4\sqrt{12 - 4\sqrt{\dots\infty}}} &= \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 - 4\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 - 4\sqrt{\dots\infty}}} \Rightarrow \\ \sqrt{12 - 4\sqrt{12 - 4\sqrt{\dots\infty}}} &= \sqrt{2 \cdot 3 \cdot (3 - 1) - (3 + 1)\sqrt{2 \cdot 3 \cdot (3 - 1) - (3 + 1)\sqrt{\dots\infty}}} \\ \Rightarrow \sqrt{12 - 4\sqrt{12 - 4\sqrt{\dots\infty}}} &= 3 - 1 \Rightarrow \sqrt{12 - 4\sqrt{12 - 4\sqrt{\dots\infty}}} = 2.\end{aligned}$$

S3. Radicais Alternados**a) Radicais Alternados Simples:**

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \dots \infty}}} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}; & 0 < a \leq 1 \\ \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}; & a > 1 \end{cases}$$

Demonstração: Nesta demonstração usaremos uma técnica de fatoração que será mostrada no capítulo sobre fatoração.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \dots \infty}}} \Rightarrow x^2 = a - \sqrt{a + x} \Rightarrow \sqrt{a + x} = a - x^2 \\ \Rightarrow a + x &= (a - x^2)^2 \Rightarrow a + x = a^2 - 2ax^2 + x^4 \\ \Rightarrow x^4 - 2ax^2 + a^2 - x - a &= 0 \end{aligned}$$

Somando e subtraindo x^3 , x^2 e ax , temos:

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^2 + a^2 - x - a &= 0 \\ \Rightarrow x^4 - \boxed{ax^2 - ax^2} + a^2 - x - a + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + ax - ax &= 0 \\ \Rightarrow x^2(x^2 - a - x) + x(x^2 - x - a) - a(x^2 - a - x) + (x^2 - x - a) &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - a - x)(x^2 + x - a + 1) &= 0 \therefore x^2 - x - a = 0 \text{ ou } x^2 + x - a + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - x - a = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) \therefore \Delta = 1 + 4a;$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 + 4a}}{2 \cdot 1} \therefore \boxed{x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}; 0 < a \leq 1.$$

$$x^2 + x - a + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a + 1) \therefore \Delta = 4a - 3;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2 \cdot 1} \therefore \boxed{x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}}; a > 1.$$

b) Radicais Alternados de Termos Consecutivos:

$$\boxed{\sqrt{a(a+1)} - \sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1)} - \sqrt{\dots \infty} = a}; \forall a > 0.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1) - \sqrt{\dots\infty}}}} \\
 \Rightarrow x^2 &= a(a+1) - \sqrt{a(a+1) + x} \Rightarrow \sqrt{a(a+1) + x} = a(a+1) - x^2 \\
 \Rightarrow a(a+1) + x &= (a(a+1) - x^2)^2 \\
 \Rightarrow a(a+1) + x &= [a(a+1)]^2 - 2a(a+1)x^2 + x^4 \\
 \Rightarrow x^4 - 2a(a+1)x^2 - x - a(a+1) + [a(a+1)]^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Fazendo $k = a(a+1)$, temos uma equação do 2º grau em função de k (*):

$$\begin{aligned}
 x^4 - 2a(a+1)x^2 - x - a(a+1) + [a(a+1)]^2 &= 0 \\
 \Rightarrow x^4 - 2kx^2 - x - k + k^2 &= 0 \Rightarrow k^2 - (2x^2 + 1)k + (x^4 - x) = 0 \\
 \Rightarrow \Delta &= [-(2x^2 + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^4 - x) \Rightarrow \Delta = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 + 4x \\
 \Rightarrow \Delta &= 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \Delta = (2x + 1)^2 \\
 k &= \frac{-[-(2x^2 + 1)] \pm \sqrt{(2x + 1)^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow k = \frac{2x^2 + 1 \pm 2x + 1}{2} \\
 \Rightarrow k_1 &= \frac{2x^2 + 1 + 2x + 1}{2} \quad \text{ou} \quad k_1 = \frac{2x^2 + 1 - (2x + 1)}{2} \\
 \therefore k_1 &= x^2 + x + 1 \quad \text{ou} \quad k_1 = x^2 + x.
 \end{aligned}$$

(*) **Observação:** É muito interessante essa técnica de encontrar as raízes de uma equação, em função do parâmetro.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 x^4 - 2kx^2 - x - k + k^2 &= 0 \Rightarrow 1 \cdot [k - (x^2 + x + 1)] \cdot [k - (x^2 + x)] = 0 \\
 \Rightarrow [a(a+1) - (x^2 + x + 1)] \cdot [a(a+1) - (x^2 + x)] &= 0 \\
 \therefore a(a+1) - (x^2 + x + 1) &= 0 \quad \text{ou} \quad a(a+1) - (x^2 + x) = 0 \\
 \therefore x^2 + x + 1 - a(a+1) &= 0 \quad (\text{não serve}) \quad \text{ou} \quad x^2 + x - a(a+1) = 0 \\
 x^2 + x - a(a+1) &= 0 \Rightarrow x^2 + x - a - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 - a^2 + x - a = 0 \\
 \Rightarrow (x+a)(x-a) + x - a &= 0 \Rightarrow (x-a)(x+a+1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x - a = 0 \therefore \boxed{x = a} \text{ ou } x + a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -a - 1} \text{ (não serve)}$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{a(a+1)} - \sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1)} - \sqrt{\dots\infty} = a; \forall a > 0.}$$

Exemplo Resolvido 73: Mostre que $\sqrt{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{4} - \dots\infty}}} = \frac{3}{2}$.

Resolução: Note que $0 < \frac{3}{4} < 1$, então:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{4} - \dots\infty}}} \Rightarrow E = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{3}{4}}}{2} \Rightarrow E = \frac{1 + \sqrt{1 + 3}}{2} \\ \Rightarrow E &= \frac{1 + \sqrt{4}}{2} \Rightarrow E = \frac{1 + 2}{2} \therefore \sqrt{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{4} - \dots\infty}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 74: Mostre que $\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \dots\infty}}} = 1$.

Resolução: Note que $3 > 1$, então:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \dots\infty}}} \Rightarrow E = \frac{-1 + \sqrt{4 \cdot 3 - 3}}{2} \Rightarrow E = \frac{-1 + \sqrt{12 - 3}}{2} \\ \Rightarrow E &= \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} \Rightarrow E = \frac{-1 + 3}{2} \Rightarrow E = \frac{2}{2} \Rightarrow \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \dots\infty}}} = 1. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 75: Efetue $\sqrt{8 \cdot 9 - \sqrt{8 \cdot 9 + \sqrt{8 \cdot 9 - \dots\infty}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sqrt{8 \cdot 9 - \sqrt{8 \cdot 9 + \sqrt{8 \cdot 9 - \dots\infty}}} &= \sqrt{8(8+1) - \sqrt{8(8+1) + \sqrt{8(8+1) - \dots\infty}}} \\ \Rightarrow \sqrt{8 \cdot 9 - \sqrt{8 \cdot 9 + \sqrt{8 \cdot 9 - \dots\infty}}} &= 8. \end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 2.53

Qual o valor de $\sqrt{1 - \sqrt{\frac{21}{16}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{21}{16}}} - \dots$?

Questão 2.54 (Rússia/IMO-Longlist-1969)

Prove que, para $a > b^2$, ocorre a identidade

$$\sqrt{a - b\sqrt{a + b\sqrt{a - b\sqrt{a + \dots}}}} = \sqrt{a - \frac{3b^2}{4}} - \frac{b}{2}.$$

Questão 2.55

Qual o valor de $\sqrt{60 - 7\sqrt{60 - 7\sqrt{60 - 7\sqrt{\dots\infty}}}}$?

Questão 2.56

Qual o valor de $\sqrt{162 - 11\sqrt{162 - 11\sqrt{162 - 11\sqrt{162\ldots\infty}}}}$?

Questão 2.57

Qual o valor de $\sqrt{2450 - \sqrt{2450 - \sqrt{2450 - \sqrt{2450\ldots\infty}}}}$?

Questão 2.58

Qual o valor de $\sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \dots\infty}}}$?

Questão 2.59

Qual o valor de $\sqrt{\frac{33}{64} - \sqrt{\frac{33}{64} + \sqrt{\frac{33}{64} - \dots\infty}}}$?

Demonstração:

$$x = \sqrt[m]{a^n \sqrt[m]{a^n \sqrt[m]{a^n \dots \infty}}} \Rightarrow x = \sqrt[m]{a^n \cdot x} \Rightarrow x^m = a^n \cdot x \Rightarrow \frac{x^m}{x} = a^n$$

$$\Rightarrow x^{m-1} = a^n \therefore x = \sqrt[m-1]{a^n}.$$

$$\therefore \sqrt[m]{a^n \sqrt[m]{a^n \sqrt[m]{a^n \dots \infty}}} = \sqrt[m-1]{a^n}; \forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \text{ e } a > 0.$$

Outra forma:

$$\left[a \left(a \left(a \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m-1}}; \forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \text{ e } a > 0.$$

Demonstração:

$$x = \left(a^n \left(a^n \left(a^n \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow x = \left(a^n \cdot x \right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow x^m = a^n \cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{x^m}{x} = a^n \Rightarrow x^{m-1} = a^n \therefore x = a^{\frac{n}{m-1}}.$$

$$\therefore \left[a \left(a \left(a \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m-1}}; \forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \text{ e } a > 0.$$

Exemplo Resolvido 76: Efetue $\sqrt{100\sqrt{100\sqrt{100\dots\infty}}}$.

Resolução: É imediato que $\sqrt{100\sqrt{100\sqrt{100\dots\infty}}} = 100$.

Exemplo Resolvido 77: Efetue $\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\dots\infty}}} = \sqrt[4]{2}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\dots\infty}}} = \sqrt[5-1]{2} \Rightarrow \sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\dots\infty}}} = \sqrt[4]{2}.$$

Exemplo Resolvido 78: Mostre que $\left(8 \left(8 \left(8 \dots \infty \right)^{\frac{1}{9}} \right)^{\frac{1}{9}} \right)^{\frac{1}{9}} = 8^{\left(\frac{1}{8} \right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\left(8 \left(8 \left(8 \dots \infty \right)^{\frac{1}{9}} \right)^{\frac{1}{9}} \right)^{\frac{1}{9}} = 8^{\left(\frac{1}{9-1} \right)} \Rightarrow \left(8 \left(8 \left(8 \dots \infty \right)^{\frac{1}{9}} \right)^{\frac{1}{9}} \right)^{\frac{1}{9}} = 8^{\left(\frac{1}{8} \right)}.$$

S5. Radicais em Divisão

a) Radicais Simples:

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}} = \sqrt[3]{a}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}} \Rightarrow x^2 = a + x \Rightarrow x^2 = \frac{a}{x} \Rightarrow x^3 = a$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{a} \therefore \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}} = \sqrt[3]{a}.$$

b) Generalização da Raiz Anterior para Raiz m-ésima:

$$\sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \dots \infty}}} = \sqrt[m+1]{a}; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

Demonstração:

$$x = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \dots \infty}}} \Rightarrow x^m = a + x \Rightarrow x^{m+1} = a \therefore x = \sqrt[m+1]{a}$$

$$\therefore \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \dots \infty}}} = \sqrt[m+1]{a}; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

Outra forma:

$$\left(a + \left(a + \left(a + \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m+1}}; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

Demonstração:

$$x = \left(a \div \left(a \div \left(a \div \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow x^m = a + x \Rightarrow x^m = \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow x^{m+1} = a \therefore x = a^{\frac{1}{m+1}}$$

$$\therefore \left[a \div \left(a \div \left(a \div \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m+1}} ; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

c) Generalização Para a n-ésima Potência e Raiz de Índice m.

$$\boxed{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \dots \infty}} = \frac{m+1}{m} \sqrt[m]{a^n}} ; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

Demonstração:

$$x = \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \dots \infty}}} \Rightarrow x = \sqrt[m]{a^n \div x} \Rightarrow x^m = a^n \div x$$

$$\Rightarrow x^m \cdot x = a^n \Rightarrow x^{m+1} = a^n \therefore x = \frac{m+1}{m} \sqrt[m]{a^n}.$$

$$\therefore \boxed{\sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \sqrt[m]{a^n \div \dots \infty}} = \frac{m+1}{m} \sqrt[m]{a^n}} ; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

Outra forma:

$$\left[a \div \left(a \div \left(a \div \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m+1}} ; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

Demonstração:

$$x = \left(a^n \div \left(a^n \div \left(a^n \div \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow x = \left(a^n \div x \right)^{\left(\frac{1}{m} \right)}$$

$$\Rightarrow x^m = a^n + x \Rightarrow x^m = \frac{a^n}{x} \Rightarrow x^{m-1} = a^n \therefore x = a^{\frac{n}{m+1}}.$$

$$\therefore \left[a^n + \left(a^n + \left(a^n + \dots \infty \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m+1}}; \forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ e } a > 0.$$

d) Divisão Composta 01:

$$\sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{\dots \infty} a}} = \sqrt[m]{a}$$

Demonstração:

$$x = \sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{\dots \infty} a}} \Rightarrow x = \sqrt[m]{\frac{a}{x}} \Rightarrow x^m = \frac{a}{x} \Rightarrow x^{m+1} = a \therefore x = \sqrt[m+1]{a}.$$

$$\therefore \sqrt[m]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{\dots \infty} a}} = \sqrt[m]{a}$$

e) Divisão Composta 02:

$$\sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdot \frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdots \frac{\sqrt[m]{a}}{a}} = a^{\left(\frac{m}{m+1}\right)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdot \frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdots \frac{\sqrt[m]{a}}{a}} &= \sqrt[m]{\frac{a^{\frac{m \cdot m}{m}} \cdot a^{\frac{m \cdot m}{m}} \cdots a^{\frac{m \cdot m}{m}}}{a^m}} = a^{\left(\frac{1}{m}\right)} \cdot a^{\left(-\frac{1}{m \cdot m}\right)} \cdot a^{\left(\frac{1}{m \cdot m \cdot m}\right)} \cdots a^{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} - \cdots\right)} \\ &= a^{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} - \cdots\right)} \Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdots \frac{\sqrt[m]{a}}{a}} = a^{\left[1 - \left(-\frac{1}{m}\right)\right]} \Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdots \frac{\sqrt[m]{a}}{a}} = a^{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{m}}\right)} \\ &\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdots \frac{\sqrt[m]{a}}{a}} = a^{\left(\frac{1}{\frac{m+1}{m}}\right)} \Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[m]{a}}{a} \cdots \frac{\sqrt[m]{a}}{a}} = a^{\left(\frac{m}{m+1}\right)} \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 79: Efetue $\sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \dots \infty}}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \dots \infty}}} = \sqrt[3]{27} \Rightarrow \sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \dots \infty}}} = 3.$$

Exemplo Resolvido 80: Efetue $\sqrt[4]{1024 \div \sqrt[4]{1024 \div \dots \infty}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1024 \div \sqrt[4]{1024 \div \dots \infty}} &= \sqrt[4+1]{1024} \Rightarrow \sqrt[4]{1024 \div \sqrt[4]{1024 \div \dots \infty}} = \sqrt[5]{1024} \\ &\Rightarrow \sqrt[4]{1024 \div \sqrt[4]{1024 \div \dots \infty}} = \sqrt[5]{2^{10}} \Rightarrow \sqrt[4]{1024 \div \sqrt[4]{1024 \div \dots \infty}} = 4. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 81: Mostre que $\left(11 \div \left(11 \div \left(11 \div \dots \infty\right)^{\frac{1}{10}}\right)^{\frac{1}{10}}\right)^{\frac{1}{10}} = 11^{\left(\frac{1}{11}\right)}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\left(11 \div \left(11 \div \left(11 \div \dots \infty \right)^{\frac{1}{10}} \right)^{\frac{1}{10}} \right)^{\frac{1}{10}} = 11^{\frac{1}{10+1}}$$

$$\Rightarrow \left(11 \div \left(11 \div \left(11 \div \dots \infty \right)^{\frac{1}{10}} \right)^{\frac{1}{10}} \right)^{\frac{1}{10}} = 11^{\left(\frac{1}{11} \right)}.$$

Exemplo Resolvido 82: Mostre que

$$\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{64}}}}} = 336\sqrt{2}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{64}}}}} = \frac{2016}{\sqrt{64}} \Rightarrow \sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{64}}}}} = \frac{2016}{\sqrt{2^6}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{64}}}}} = \frac{2016}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{64}}}}} = 336\sqrt{2}.$$

Exemplo Resolvido 83: Qual o valor de $\sqrt[6]{\frac{\sqrt[6]{128}}{128}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[6]{\frac{\sqrt[6]{128}}{128}} = 128^{\left(\frac{6}{6+1}\right)} \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{\sqrt[6]{128}}{128}} = 2^{7\left(\frac{6}{7}\right)} \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{\sqrt[6]{128}}{128}} = 2^6 \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{\sqrt[6]{128}}{128}} = 64.$$

S6. Radicais em Cadeia

a) Potência em cadeia infinita 01:

Se $x^{x^{x^{\dots\infty}}} = a$, então $\boxed{x^{x^{x^{\dots\infty}}} = \sqrt[a]{a}}.$

Demonstração:

$$x^{x^{x^{\dots\infty}}} = a \Rightarrow x^a = a \therefore \boxed{x^{x^{x^{\dots\infty}}} = \sqrt[a]{a}}.$$

b) Potência em cadeia infinita 02:

$$\boxed{\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\dots\infty}} = x}.$$

Demonstração:

$$\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\dots\infty}} = a \Rightarrow (\sqrt[x]{x})^a = a \Rightarrow \sqrt[x]{x} = \sqrt[a]{a} \Rightarrow x = a \therefore \boxed{\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\dots\infty}} = x}.$$

c) Potência em cadeia infinita 03:

$$\boxed{b^{\sqrt[a]{b}}^{\sqrt[a]{b}}^{\dots\infty}} = a.$$

Demonstração:

$$b^{\sqrt[a]{b}}^{\sqrt[a]{b}}^{\dots\infty} = x \Rightarrow b^{\sqrt[a]{b}^x} = x \Rightarrow b^{\sqrt[a]{b}} = x^{\frac{1}{\sqrt[a]{b}^x}} \Rightarrow a^{\frac{1}{b}} = x^{\frac{1}{\sqrt[a]{b}^x}}$$

$$\Rightarrow a^{b^{-1}} = x^{b^a} \Rightarrow a^{b^{-1}} = x^{b^{-\frac{x}{a}}}$$

Por comparação, temos:

$$b^{-1} = b^{-\frac{x}{a}} \Rightarrow -1 = -\frac{x}{a} \Rightarrow x = a \therefore \boxed{b\sqrt[a]{b}^{\dots^x} = a}$$

Observação: Se $x \neq a$, não poderíamos usar o resultado.

d) Potência em cadeia infinita 04:

$$\text{Se } x^{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots^x}}}} = a, \text{ então } \boxed{x^{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots^x}}}} = a^{\frac{\sqrt{a}}{a}}}$$

Demonstração:

$$x^{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots^x}}}} = a \Rightarrow x^{\sqrt{a}} = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \therefore \boxed{x^{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots^x}}}} = a^{\frac{\sqrt{a}}{a}}}$$

e) Potência em cadeia infinita 05:

$$\text{Se } \boxed{x^{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{\dots^x}}}} = a}, \text{ então } \boxed{x^{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{\dots^x}}}} = a^{\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}}}$$

Demonstração:

$$x^{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{\dots^x}}}} = a \Rightarrow x^{\sqrt[n]{a}} = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} \therefore \boxed{x^{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{\dots^x}}}} = a^{\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}}}$$

f) Potência em cadeia infinita 06:

$$\boxed{x^{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots^x}}}} = x^x}$$

Demonstração:

$$x^{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots^x}}}} = a \Rightarrow x^{\sqrt{a}} = a$$

Fazendo $\sqrt[x]{a} = y \Rightarrow a = y^x$, temos:

$$\Rightarrow x^y = a \Rightarrow x^y = y^x \Rightarrow x = y \text{ (Por comparação)}$$

$$\Rightarrow a = y^x \Rightarrow a = x^x \therefore \boxed{x \sqrt[x]{x \sqrt[x]{x \dots \infty}} = x^x}.$$

Observação: Para $x = 2$ e $x = 4$, temos duas soluções, visto que:

$$2^4 = 4^2 \text{ e } 4^2 = 2^4.$$

Logo:

$$\boxed{x=2} \Rightarrow 2 \sqrt[2]{2 \sqrt[2]{2 \dots \infty}} = a \Rightarrow 2 \sqrt{a} = a$$

Fazendo $\sqrt{a} = y \Rightarrow a = y^2$, temos:

$$\Rightarrow 2^y = a \Rightarrow 2^y = y^2 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = 4 \text{ (Por comparação)}$$

$$\Rightarrow a = 2^2 \therefore \boxed{a=4} \text{ ou } a = 2^4 \therefore \boxed{a=16}.$$

$$\boxed{x=4} \Rightarrow 4 \sqrt[4]{4 \sqrt[4]{4 \dots \infty}} = a \Rightarrow 4 \sqrt[4]{a} = a.$$

Fazendo $\sqrt[4]{a} = y \Rightarrow a = y^4$, temos:

$$\Rightarrow 4^y = a \Rightarrow 4^y = y^4 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = 4 \text{ (Por comparação)}$$

$$\Rightarrow a = 4^2 \therefore \boxed{a=16} \text{ ou } a = 4^4 \therefore \boxed{a=256}.$$

Exemplo Resolvido 84: Se $x \sqrt[x]{x \sqrt[x]{x \dots \infty}} = 5$, qual o valor de x ?

Resolução: Podemos escrever:

$$x \sqrt[x]{x \sqrt[x]{x \dots \infty}} = 5 \Rightarrow x^5 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{5}.$$

Exemplo Resolvido 85: Qual o valor de $\sqrt[6]{6 \sqrt[6]{6 \sqrt[6]{6 \dots \infty}}}$?

Questão 2.64

Qual o valor de x , sabendo que $x^{x^x} = 2017$?

Questão 2.65

Qual o valor de x , sabendo que $x^{x^x} = 27$?

Questão 2.66

Qual o valor de $\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\dots}}}$?

Questão 2.67

Qual o valor de $\sqrt[243]{\sqrt[243]{\sqrt[243]{\dots}}}$?

Questão 2.68

Se $M = \sqrt{x-3}$ e $M = 5\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, determine x .

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

Questão 2.69

Qual o valor de $\sqrt[2]{\sqrt[8/2]{\sqrt[2]{\sqrt[8/2]{\dots}}}}$?

Questão 2.70

Qual o valor de $(5\sqrt{3})^{\sqrt[7]{5/2}(5\sqrt{3})^{\sqrt[7]{5/2}}}$?

Questão 2.71

Qual o valor de x , sabendo que $x^{\sqrt{x^{\sqrt{x^{\sqrt{x^{\dots}}}}}} = 625$?

Questão 2.72

Qual o valor de x , sabendo que $x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \dots x}}} = 1024$?

Questão 2.73

Qual o valor de x , sabendo que $x \sqrt[16]{x \sqrt[16]{x \sqrt[16]{x \dots x}}} = 7$?

Questão 2.74

Qual o valor de x , sabendo que $x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \dots x}}} = 32$?

Questão 2.75

Qual o valor de $7 \sqrt[7]{7 \sqrt[7]{7 \sqrt[7]{7 \dots 7}}}$?

Questão 2.76

Qual o valor de $13 \sqrt[13]{13 \sqrt[13]{13 \sqrt[13]{13 \dots 13}}}$?

Desse ponto em diante, veremos as operações com radicais. Para efetuar soma e subtração, usaremos a estratégia de “colocar em evidência” e então efetuaremos a operação. Para efetuar multiplicação e divisão, usaremos as propriedades de multiplicação e divisão vistas anteriormente. Vejamos a seguir como operar com radicais!

2.6) Operações com Radicais:

Nesta seção, iremos dividir em duas partes: a parte “a” será a adição e a subtração, e a parte “b” será a multiplicação e a divisão. Para efetuar as operações com radicais da parte “a”, devemos verificar se os radicais são semelhantes, isto é, se os radicais têm o mesmo índice.

a) Adição e Subtração:

Podemos reduzir os radicais em uma soma ou diferença, desde que sejam radicais semelhantes.

Exemplo Resolvido 87: Efetue $3\sqrt{4} + 7\sqrt{4}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$3\sqrt{4} + 7\sqrt{4} = (3+7)\sqrt{4} \Rightarrow 3\sqrt{4} + 7\sqrt{4} = 10\sqrt{4}.$$

Exemplo Resolvido 88: Efetue $20\sqrt[5]{a} + 8\sqrt[5]{a} - 14\sqrt[5]{a}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$20\sqrt[5]{a} + 8\sqrt[5]{a} - 14\sqrt[5]{a} = (20+8-14)\sqrt[5]{a} \Rightarrow 20\sqrt[5]{a} + 8\sqrt[5]{a} - 14\sqrt[5]{a} = 14\sqrt[5]{a}.$$

Exemplo Resolvido 89: Efetue $m\sqrt[n]{a^x} + p\sqrt[n]{a^x} + q\sqrt[n]{a^x}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$m\sqrt[n]{a^x} + p\sqrt[n]{a^x} + q\sqrt[n]{a^x} = (m+p+q)\sqrt[n]{a^x}.$$

Podemos também manipular os radicais de modo a ter termos semelhantes, vejamos alguns exemplos.

Exemplo Resolvido 90: Efetue $\sqrt{8} + \sqrt{32}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} + \sqrt{32} &= \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} \Rightarrow \sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \sqrt{8} + \sqrt{32} = 2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{8} + \sqrt{32} = (2+4)\sqrt{2} \\ &\Rightarrow \sqrt{8} + \sqrt{32} = 6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Exemplo 91: Mostre que $2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27a^4} + \sqrt[3]{125a} = (7 - 3a)\sqrt[3]{a}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27a^4} + \sqrt[3]{125a} = 2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27 \cdot a^3 \cdot a} + \sqrt[3]{125 \cdot a}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27a^4} + \sqrt[3]{125a} = 2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{a}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27a^4} + \sqrt[3]{125a} = 2\sqrt[3]{a} - 3 \cdot a \cdot \sqrt[3]{a} + 5 \cdot \sqrt[3]{a}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27a^4} + \sqrt[3]{125a} = (2 - 3a + 5)\sqrt[3]{a}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{27a^4} + \sqrt[3]{125a} = (7 - 3a)\sqrt[3]{a}.$$

b) Multiplicação e Divisão:

Para a multiplicação e divisão, devemos considerar dois casos: se os radicais tiverem o mesmo índice e se os radicais tiverem índices diferentes.

Caso 01: Se os radicais possuem o mesmo índice.

Se os radicais possuem o mesmo índice, você vai utilizar a propriedade do produto de radicais de mesmo índice.

Exemplo Resolvido 92: Efetue $2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{11}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{11} = 10\sqrt{2 \cdot 11} \Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{11} = 10\sqrt{22}.$$

Exemplo Resolvido 93: Mostre que $3\sqrt[4]{a} \cdot 4\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{c^2} \cdot 2\sqrt[4]{d} = 24 \cdot \sqrt[4]{abc^2d}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$3\sqrt[4]{a} \cdot 4\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{c^2} \cdot 2\sqrt[4]{d} = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c^2 \cdot d}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[4]{a} \cdot 4\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{c^2} \cdot 2\sqrt[4]{d} = 24 \cdot \sqrt[4]{abc^2d}.$$

Exemplo Resolvido 94: Efetue $\frac{m \sqrt[4]{a}}{p \sqrt[4]{b}}$.

$$\text{Resolução: } \frac{m \sqrt[4]{a}}{p \sqrt[4]{b}} = \frac{m}{p} \cdot \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}.$$

Exemplo Resolvido 95: Efetue $\frac{10\sqrt[3]{5}}{4\sqrt[3]{3}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{10\sqrt[3]{5}}{4\sqrt[3]{3}} = \frac{10}{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow \frac{10\sqrt[3]{5}}{4\sqrt[3]{3}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}.$$

Caso 02: Se os radicais tiverem índices diferentes, devemos efetuar os seguintes passos:

Passo 01: Tira-se o mmc dos índices, o mmc será o novo índice.

Passo 02: Efetua-se a divisão do mmc por cada índice anterior, e o resultado multiplica-se pelo expoente do radicando.

Passo 03: Efetua-se a operação como no caso anterior.

Exemplo Resolvido 96: Efetue $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{8}$.

Resolução: Efetuando os três passos acima, temos:

$$E = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{8} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^{np}} \cdot \sqrt[n]{b^{np}} \cdot \sqrt[n]{8^{np}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{a^n \cdot b^n \cdot (2^3)^{np}}$$

$$\therefore E = \sqrt[n]{a^n \cdot b^n \cdot 2^{3np}}.$$

Exemplo Resolvido 97: Efetue $2\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{18a^2} \cdot \sqrt[6]{25a}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{18a^2} \cdot \sqrt[6]{25a} \Rightarrow E = 2 \cdot \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{(18a^2)^3} \cdot \sqrt[12]{(25a)^2} \Rightarrow$$

$$E = 2 \cdot \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{18^3 \cdot a^6} \cdot \sqrt[12]{25^2 \cdot a^2} \Rightarrow E = 2 \cdot \sqrt[12]{a^4 \cdot (2 \cdot 3^2)^3 \cdot a^6 \cdot 25^2 \cdot a^2}$$

$$\Rightarrow E = 2 \cdot \sqrt[12]{a^{4+6+2} \cdot 2^3 \cdot 3^6 \cdot (5^2)^2} \Rightarrow E = 2 \cdot \sqrt[12]{a^{12} \cdot 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4}$$

$$\therefore E = 2a \cdot \sqrt[12]{2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4}.$$

Capítulo 03 - Racionalização

Introdução

Racionalizar uma fração consiste em eliminar o radical (ou os radicais) que estiverem no denominador, para tal tarefa usamos o chamado fator de racionalização.

3.1) Quocientes Notáveis

Os quocientes notáveis são expressões que vêm diretamente dos produtos notáveis, ferramenta que você verá mais à frente. Serão muito usados na racionalização, nesta seção veremos os mais utilizados e a generalização, mais à frente veremos mais dessa ferramenta fortíssima!

$$a) \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b .$$

$$b) \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 .$$

$$c) \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2 .$$

$$d) \frac{a^4 - b^4}{a - b} = (a + b)(a^2 + b^2) .$$

$$e) \frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 .$$

$$f) \frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 .$$

$$g) \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} .$$

$$h) \frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1}, \text{ para } n \text{ par} .$$

$$i) \frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1} - \frac{2b^n}{a+b}, \text{ para } n \text{ ímpar} .$$

$$j) \frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}, \text{ para } n \text{ ímpar} .$$

$$k) \frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1} + \frac{2b^n}{a+b}, \text{ para } n \text{ par} .$$

$$l) \frac{a^n + b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} + \frac{2b^n}{a - b}.$$

3.2) Fator Racionalizante

O fator racionalizante é o fator que elimina o radical quando efetuamos a multiplicação pela fração. Vejamos alguns casos em que usamos o fator racionalizante e outros bem interessantes.

Caso 01: Quando o denominador é da forma \sqrt{A} :

Note que nesse caso ao multiplicarmos o denominador por \sqrt{A} , fica:

$$\frac{N}{\sqrt{A}} = \frac{N}{\sqrt{A}} \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A}} = \frac{N \cdot \sqrt{A}}{(\sqrt{A})^2} \Rightarrow \boxed{\frac{N}{\sqrt{A}} = \frac{N \cdot \sqrt{A}}{A}}$$

Assim, \sqrt{A} é o fator racionalizante.

Exemplo Resolvido 98: Mostre que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo Resolvido 99: Mostre que $\frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7 \cdot \sqrt{10}}{10}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7 \cdot \sqrt{10}}{(\sqrt{10})^2} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7 \cdot \sqrt{10}}{10}.$$

Exemplo Resolvido 100: Mostre que $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3 \cdot 12}}{(\sqrt{12})^2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{36}}{12} \\ &\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{3 \cdot 6}{12} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{18}{12} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Caso 02: Quando o denominador é da forma $\sqrt[n]{A^m}$:

Note que nesse caso ao multiplicarmos o denominador por $\sqrt[n]{A^{n-m}}$, fica:

$$\begin{aligned}\frac{N}{\sqrt[n]{A^m}} &= \frac{N}{\sqrt[n]{A^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^{n-m}}} \Rightarrow \frac{N}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{N \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^m} \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}}} \\ &\Rightarrow \frac{N}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{N \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^m \cdot A^{n-m}}} \Rightarrow \frac{N}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{N \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^{m+n-m}}} \\ &\Rightarrow \frac{N}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{N \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^n}} \Rightarrow \boxed{\frac{N}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{N \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}}}{A}}.\end{aligned}$$

Assim, $\sqrt[n]{A^{n-m}}$ é o fator racionalizante.

Exemplo Resolvido 101: Mostre que $\frac{3}{\sqrt[10]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[10]{2^7}}{10}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt[10]{2^3}} &= \frac{3}{\sqrt[10]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[10]{2^{10-3}}}{\sqrt[10]{2^{10-3}}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt[10]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[10]{2^7}}{\sqrt[10]{2^3} \cdot \sqrt[10]{2^7}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt[10]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[10]{2^7}}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 2^7}} \\ &\Rightarrow \frac{3}{\sqrt[10]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[10]{2^7}}{\sqrt[10]{2^{10}}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt[10]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[10]{2^7}}{10}.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 102: Mostre que $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[12]{3 \cdot 6^3}}{2}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2^3}} &= \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^{4-3}}}{\sqrt[4]{2^{4-3}}} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[12]{3^4 \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{2^3 \cdot 2}} \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[12]{3 \cdot 3^3 \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{2^4}} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[12]{3 \cdot 6^3}}{2}.\end{aligned}$$

Caso 03: Quando o denominador é um quociente notável:

Neste caso você multiplica tudo pelo fator do quociente notável.

Exemplo Resolvido 103: Mostre que $\frac{12}{3+3\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{12}{3+3\sqrt{5}} &= \frac{12}{3+3\sqrt{5}} \cdot \frac{3-3\sqrt{5}}{3-3\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{12}{3+3\sqrt{5}} = \frac{12 \cdot (3-3\sqrt{5})}{3^2 - (3\sqrt{5})^2} \\ &\Rightarrow \frac{12}{3+3\sqrt{5}} = \frac{36 - 36\sqrt{5}}{9 - 45} \Rightarrow \frac{12}{3+3\sqrt{5}} = \frac{36 \cdot (1 - \sqrt{5})}{-36} \\ &\Rightarrow \frac{12}{3+3\sqrt{5}} = \frac{(1 - \sqrt{5})}{-1} \Rightarrow \frac{12}{3+3\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 104: Mostre que $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})}{7 - 3} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4} \\ &\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 105: Mostre que $\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} &= \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} \cdot \frac{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2}} \\ &\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{49 - 40}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{9}} \\ &\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}}{3} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \sqrt{7+2\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 106: Mostre que $\frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}}{5}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{7})^2 + \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{7})^2 + \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{7})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}}{7 - 2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}}{5}.\end{aligned}$$

Exemplo 107: Mostre que $\frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}} = \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}} &= \frac{1}{\sqrt[5]{3^4} + \sqrt[5]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[5]{2^2 \cdot 3^2} + \sqrt[5]{3 \cdot 2^3} + \sqrt[5]{2^4}} \\ \frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}} &= \frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}} &= \frac{\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}}{(\sqrt[5]{3})^5 - (\sqrt[5]{2})^5} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}} &= \frac{\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}}{3 - 2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}} &= \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}.\end{aligned}$$

Caso 04: Formas interessantes que seguem a mesma linha de raciocínio.

1) Forma $\frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}}$.

$$\frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C})}{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 - (\sqrt{C})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C})}{A + 2\sqrt{AB} + B - C}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C})}{A + B - C + 2\sqrt{AB}} \cdot \frac{A + B - C - 2\sqrt{AB}}{A + B - C - 2\sqrt{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}) \cdot (A + B - C - 2\sqrt{AB})}{(A + B - C)^2 - (2\sqrt{AB})^2}$$

$$\therefore \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}) \cdot (A + B - C - 2\sqrt{AB})}{(A + B - C)^2 - 4AB}$$

2) Forma $\frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}}$.

$$\frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})}{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 - (\sqrt{C})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})}{A + 2\sqrt{AB} + B - C}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})}{A + B - C + 2\sqrt{AB}} \cdot \frac{A + B - C - 2\sqrt{AB}}{A + B - C - 2\sqrt{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) \cdot (A + B - C - 2\sqrt{AB})}{(A + B - C)^2 - (2\sqrt{AB})^2}$$

$$\therefore \frac{N}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) \cdot (A + B - C - 2\sqrt{AB})}{(A + B - C)^2 - 4AB}$$

3) Forma $\frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}}$.

$$\frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}}{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C})}{(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 - (\sqrt{C})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C})}{A - 2\sqrt{AB} + B - C}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C})}{A + B - C - 2\sqrt{AB}} \cdot \frac{A + B - C + 2\sqrt{AB}}{A + B - C + 2\sqrt{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}) \cdot (A + B - C + 2\sqrt{AB})}{(A + B - C)^2 - (2\sqrt{AB})^2}$$

$$\therefore \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}) \cdot (A + B - C + 2\sqrt{AB})}{(A + B - C)^2 - 4AB}$$

4) Forma $\frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}}$.

$$\frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C})}{(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 - (\sqrt{C})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C})}{A - 2\sqrt{AB} + B - C}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C})}{A + B - C - 2\sqrt{AB}} \cdot \frac{A + B - C + 2\sqrt{AB}}{A + B - C + 2\sqrt{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}) \cdot (A+B-C+2\sqrt{AB})}{(A+B-C)^2 - (2\sqrt{AB})^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{N}{\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}) \cdot (A+B-C+2\sqrt{AB})}{(A+B-C)^2 - 4AB}}$$

Exemplo Resolvido 108: Mostre que $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \Rightarrow E = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (2+3-5-2\sqrt{2 \cdot 3})}{(2+3-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (-2\sqrt{6})}{-24} \Rightarrow E = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{6})}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}$$

Exemplo Resolvido 109: Mostre que $\frac{5}{1+\sqrt{11}-\sqrt{5}} = 5\sqrt{11}-15+7\sqrt{5}-2\sqrt{55}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{5}{1+\sqrt{11}-\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot (1+\sqrt{11}+\sqrt{5}) \cdot (1+11-5-2\sqrt{1 \cdot 11})}{(1+11-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}$$

$$= \frac{5 \cdot (1+\sqrt{11}+\sqrt{5}) \cdot (7-2\sqrt{11})}{(7)^2 - 44}$$

$$\Rightarrow E = \frac{5 \cdot (7-2\sqrt{11}+7\sqrt{11}-2 \cdot 11+7\sqrt{5}-2\sqrt{55})}{49-44}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{1+\sqrt{11}-\sqrt{5}} = 5\sqrt{11}-15+7\sqrt{5}-2\sqrt{55}$$

Exemplo Resolvido 110: Efetue $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10}} &= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{10}) \cdot (3+2-10+2\sqrt{3 \cdot 2})}{(3+2-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10}} &= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{10}) \cdot (-5+2\sqrt{6})}{(-5)^2 - 24} \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10}} &= -5\sqrt{3} + 3 \cdot 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 5\sqrt{10} - 2 \cdot 2\sqrt{15} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10}} &= 2\sqrt{2} - 9\sqrt{3} + 5\sqrt{10} - 4\sqrt{15}.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 111: Mostre que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{42}-2\sqrt{6})}{12}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}-\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{7}) \cdot (4+3-7+2\sqrt{4 \cdot 3})}{(4+3-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}-\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{2} \cdot (2-\sqrt{3}+\sqrt{7}) \cdot (2\sqrt{4 \cdot 3})}{-48} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}-\sqrt{7}} &= \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{14}) \cdot (4\sqrt{3})}{-48} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}-\sqrt{7}} &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{14}-2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}}{12} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}-\sqrt{7}} &= \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{42}-2\sqrt{6})}{12}.\end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 3.1

Racionalize $\frac{c}{\sqrt[3]{b^4}}$.

Questão 3.2

Racionalize $\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}}}$.

Questão 3.3 (CN-1976)

Simplifique a expressão $\frac{A\sqrt{A} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{A} - \sqrt{3}}$.

- a) $A - 9 + A\sqrt{3}$ b) $A + 3 + \sqrt{3}A$ c) $A - 3\sqrt{A}$
 d) $3 - A + \sqrt{3}$ e) $9 + \sqrt{A}$

Questão 3.4 (CN-1999-Modificada)

Racionalize $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$.

Questão 3.5

Qual o valor de $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}$?

Questão 3.6

Racionalize $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}}$.

Questão 3.7

Racionalize $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{72} - \sqrt{20} + 4\sqrt{2}}$.

Questão 3.8

Racionalize $\frac{12}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

Questão 3.9

Racionalize $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[6]{8}} + \frac{1}{\sqrt[9]{8}}$.

Questão 3.10

Qual o valor de $\frac{1}{\sqrt[4]{2} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt{2}}$?

Questão 3.11

Racionalize $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

Questão 3.12

Racionalize $\frac{4}{\sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}}$.

Questão 3.13

Racionalize $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{\sqrt{8} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}$.

Questão 3.14

Racionalize $\frac{\sqrt[5]{3\sqrt{27}} - \sqrt[5]{2\sqrt{8}}}{\sqrt{27} - \sqrt{18}}$.

Questão 3.15 (Moscou 1982)

Simplifique a expressão $\frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5}} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}$.

Questão 3.16

Qual o valor de $\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} - 1}$?

Questão 3.17

Racionalize $\frac{2a - 3b - \sqrt{ab}}{2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}}$.

Questão 3.18 (CN-1983)

Efetuada $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$, obtém-se:

- a) 4 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 1

Questão 3.19 (CN-1991)

O valor de $\frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}$ é:

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}$

Questão 3.20 (CN-1994)

O número $\frac{1}{\sqrt[4]{2\sqrt{2}+3}}$ é igual a:

- a) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ b) $\sqrt{\sqrt{2}+2}$ c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ d) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{1-\sqrt{2}}$

Questão 3.21 (CN-1997)

O valor de $\frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 2)}{2\left[(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 1)^2 - 1\right]} - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$, é:

- a) $\frac{\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}$ b) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{24}$ c) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{30}}{24}$
 d) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}{12}$ e) $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{24}$

Questão 3.22 (CN-2012)

Sabendo que $A = \frac{3 + \sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$, qual o valor de $\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?

- a) $\sqrt[5]{3^4}$ b) $\sqrt[7]{3^6}$ c) $\sqrt[8]{3^5}$ d) $\sqrt[10]{3^7}$ e) $\sqrt[12]{3^5}$

Questão 3.23

Racionalize $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}$.

3.3) Radicais Duplos

Radicais duplos são radicais em soma ou diferença de termos que podem ser transformados em algum produto notável.

Veremos alguns radicais duplos:

01) Radicais da forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Queremos transformar $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ em uma soma ou diferença de radicais. Então, vamos desenvolver isso:

Demonstração 01:

Seja $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ e $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$, temos:

Quando somamos:

$$\begin{aligned}\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} &= \sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m} - \sqrt{n} \\ \Rightarrow \sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} &= 2\sqrt{m}. \quad (\text{eq1})\end{aligned}$$

Quando subtraímos:

$$\begin{aligned}\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} &= \sqrt{m} + \sqrt{n} - (\sqrt{m} - \sqrt{n}) \\ \Rightarrow \sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} &= \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ \therefore \sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} &= 2\sqrt{n}. \quad (\text{eq2})\end{aligned}$$

Queremos m e n, então, elevando (eq1) e (eq2) ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}(\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}})^2 &= (2\sqrt{m})^2 \\ \Rightarrow A + \sqrt{B} + 2 \cdot \sqrt{(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B})} + A - \sqrt{B} &= 4m \\ \Rightarrow 2A + 2 \cdot \sqrt{(A^2 - B)} &= 4m \Rightarrow 4m = 2A + 2 \cdot \sqrt{(A^2 - B)} \\ \Rightarrow m = \frac{2A + 2 \cdot \sqrt{(A^2 - B)}}{4} \quad \therefore m &= \frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2} \\ (\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}})^2 &= (2\sqrt{n})^2 \\ \Rightarrow A + \sqrt{B} - 2 \cdot \sqrt{(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B})} + A - \sqrt{B} &= 4n \\ \Rightarrow 2A - 2 \cdot \sqrt{(A^2 - B)} &= 4n \Rightarrow 4n = 2A - 2 \cdot \sqrt{(A^2 - B)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow n = \frac{2A - 2 \cdot \sqrt{(A^2 - B)}}{4} \quad \therefore \quad n = \frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}.$$

Assim, temos:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2} \pm \frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}}.$$

Geralmente, chamamos $C = \sqrt{A^2 - B}$, daí essa expressão fica:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2} \pm \frac{A - C}{2}}.$$

Demonstração 02:

Uma outra forma é enxergar como trinômio quadrado perfeito, a saber:

$$\begin{aligned} \sqrt{A \pm \sqrt{B}} &= \sqrt{\frac{a \pm 2\sqrt{b}}{m+n}} \Rightarrow \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{m+n \pm 2\sqrt{mn}} \\ \Rightarrow \sqrt{A \pm \sqrt{B}} &= \sqrt{m \pm 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} + n} \Rightarrow \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2} \\ \therefore \sqrt{A \pm \sqrt{B}} &= |\sqrt{m} \pm \sqrt{n}|. \end{aligned}$$

Demonstração 03: Qual o valor de $\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}}$?

Seja $\sqrt{A + \sqrt{B}} = x$, $\sqrt{A - \sqrt{B}} = y$ e $E = x + y > 0$, podemos escrever (*):

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= (x + y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \\ \Rightarrow (\sqrt{A + \sqrt{B}})^2 + (\sqrt{A - \sqrt{B}})^2 &= E^2 - 2 \cdot \sqrt{A + \sqrt{B}} \cdot \sqrt{A - \sqrt{B}} \\ \Rightarrow A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} &= E^2 - 2 \cdot \sqrt{A^2 - (\sqrt{B})^2} \Rightarrow E^2 = 2A + 2 \cdot \sqrt{A^2 - B} \\ \Rightarrow E^2 &= 2(A + \sqrt{A^2 - B}) \quad \therefore E = \sqrt{2(A + \sqrt{A^2 - B})} > 0. \end{aligned}$$

(*) **Observação:** Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!

Demonstração 04: Qual o valor de $\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}}$?

Seja $x = \sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}} \Rightarrow \overset{m}{x} + \overset{n}{\left(-\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)} + \overset{p}{\left(-\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)} = 0$, então

dos produtos notáveis condicionais, temos que (*):

$$m+n+p=0 \Rightarrow m^2+n^2+p^2 = -2(mn+mp+np)$$

$$\Rightarrow m^2+n^2+p^2 = -2[m(n+p)+np]$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(-\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2 + \left(-\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2 = -2\left[x(-x) + \left(-\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)\left(-\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow x^2 + A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} = -2\left[-x^2 + \sqrt{A^2 - (\sqrt{B})^2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2 + 2A = 2x^2 - 2\sqrt{A^2 - B} \Rightarrow x^2 + 2A = 2x^2 - 2\sqrt{A^2 - B}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2A + 2\sqrt{A^2 - B} \therefore x = \sqrt{2(A + \sqrt{A^2 - B})} > 0.$$

(*) Observação: Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!

Exemplo Resolvido 112: Determine $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{3-\sqrt{2 \cdot 2}} \Rightarrow \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$A=3 \text{ e } B=8, C=\sqrt{A^2-B} \Rightarrow C=\sqrt{3^2-8} \Rightarrow \boxed{C=1}$$

$$\text{Logo: } \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} \Rightarrow \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{2}-1.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+2} \Rightarrow \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{1-2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} \Rightarrow \sqrt{3-2\sqrt{2}} = |1-\sqrt{2}|, \text{ como } 1-\sqrt{2} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3-2\sqrt{2}} = -(1-\sqrt{2}) \Rightarrow \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Exemplo Resolvido 113: Determine $\sqrt{5+\sqrt{24}}$.

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} \Rightarrow A=5 \text{ e } B=24, C=\sqrt{5^2-24} \Rightarrow C=\sqrt{25-24} \therefore \boxed{C=1}.$$

$$\text{Logo: } \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}} \Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} \Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{3+2\sqrt{6}+2} \Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{24}} = |\sqrt{3}+\sqrt{2}|, \text{ como}$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Exemplo Resolvido 114: Determine $\sqrt{28-10\sqrt{3}}$.

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{28-\sqrt{3} \cdot 10^2} \Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{28-\sqrt{300}}$$

$$\Rightarrow A=28 \text{ e } B=300, C=\sqrt{28^2-300} \Rightarrow C=\sqrt{784-300}$$

$$\Rightarrow C=\sqrt{484} \therefore \boxed{C=22}. \text{ Logo: } \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{28-\sqrt{300}} = \sqrt{\frac{28+22}{2}} - \sqrt{\frac{28-22}{2}} \Rightarrow \sqrt{28-\sqrt{300}} = \sqrt{\frac{50}{2}} - \sqrt{\frac{6}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{28-\sqrt{300}} = \sqrt{25} - \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{28-\sqrt{300}} = 5 - \sqrt{3}.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{25-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}+3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{5^2-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2} \Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = |5-\sqrt{3}|, \text{ como}$$

$$5-\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = 5-\sqrt{3}.$$

Exemplo Resolvido 115: Qual o valor de $\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$?

Resolução 01: Seja $\sqrt{3+\sqrt{8}} = x$, $\sqrt{3-\sqrt{8}} = y$ e $E = x + y > 0$, então (*):

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \quad (*)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3+\sqrt{8}})^2 + (\sqrt{3-\sqrt{8}})^2 = E^2 - 2 \cdot \sqrt{3+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow 3 + \sqrt{8} + 3 - \sqrt{8} = E^2 - 2 \cdot \sqrt{3^2 - (\sqrt{8})^2} \Rightarrow E^2 = 6 + 2 \cdot \sqrt{9-8}$$

$$\Rightarrow E^2 = 6 + 2 \cdot \sqrt{1} \Rightarrow E^2 = 6 + 2 \Rightarrow E^2 = 8 \therefore E = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 0.$$

(*) Observação: Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!

Resolução 02: Chamando a expressão toda de x , podemos escrever:

$x = \sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}} \Rightarrow x - \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = 0$. Então dos produtos notáveis condicionais, temos que (*):

$$m + n + p = 0 \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = -2(mn + mp + np) \quad (*)$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = -2[m(n+p) + np]$$

$$\Rightarrow x^2 + (-\sqrt{3+\sqrt{8}})^2 + (-\sqrt{3-\sqrt{8}})^2 = -2[x(-x) + (-\sqrt{3+\sqrt{8}})(-\sqrt{3-\sqrt{8}})]$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 + \sqrt{8} + 3 - \sqrt{8} = -2\left[-x^2 + \sqrt{3^2 - (\sqrt{8})^2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2 + 6 = 2x^2 - 2\sqrt{9-8} \Rightarrow x^2 = 6 + 2\sqrt{1} \Rightarrow x^2 = 8 \therefore x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 0.$$

(*) Observação: Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!

02) Radicais da forma: $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$.

Queremos transformar $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ em uma soma ou diferença de radicais. Então, vamos desenvolver isso:

Demonstração 01: Seja $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = m + \sqrt{n}$ e $\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = m - \sqrt{n}$.

Quando somamos, temos:

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = 2m. \quad (\text{eq1})$$

Quando subtraímos, temos:

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} - (m - \sqrt{n}) \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} - m + \sqrt{n} \therefore \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{n}. \text{ (eq2)}$$

Queremos m e n, então, elevando (eq1) e (eq2) ao cubo, temos:

$$\left(\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right)^3 = (2m)^3 \Rightarrow$$

$$A + \sqrt{B} + 3 \cdot \sqrt{(A + \sqrt{B})^2 (A - \sqrt{B})} + 3 \cdot \sqrt{(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B})^2} + A - \sqrt{B} = 8m^3$$

$$\Rightarrow 2A + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B})}\right) \left(\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right) = 8m^3$$

$$\Rightarrow 2A + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B})}\right) (2m) = 8m^3 \Rightarrow$$

$$8m^3 - 6m \cdot \left(\sqrt[3]{A^2 - (\sqrt{B})^2}\right) - 2A = 0 \therefore 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{A^2 - B}\right) - A = 0.$$

Como A e B são dados, temos que o valor pedido é racional.

Continuando o desenvolvimento, note que, se subtraímos, não chegaremos ao resultado direto, então vamos encontrar n, em função de m, multiplicando as duas equações:

$$\left(\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right) = (m + \sqrt{n})(m - \sqrt{n}) \Rightarrow \sqrt[3]{A^2 - (\sqrt{B})^2} = m^2 - n$$

$$\therefore \boxed{n = m^2 - \sqrt[3]{A^2 - B}}.$$

Demonstração 02: Podemos pensar da seguinte forma:

$$(A \pm \sqrt{B})^3 = A^3 \pm 3 \cdot A^2 \cdot \sqrt{B} + 3 \cdot A \cdot (\sqrt{B})^2 \pm (\sqrt{B})^3$$

$$\Rightarrow (A \pm \sqrt{B})^3 = A^3 \pm 3 \cdot A^2 \cdot \sqrt{B} + 3 \cdot AB \pm B\sqrt{B}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})^3} = \sqrt[3]{(A^2 + 3B) \cdot A \pm (3A^2 + B) \cdot \sqrt{B}}}.$$

Demonstração 03: Qual o valor de $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}$?

Seja $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = x$, $\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = y$ e $E = x + y > 0$, podemos escrever (*):

$$\begin{aligned}
 (x+y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \quad (*) \\
 \Rightarrow E^3 &= \left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)^3 + 3E \cdot \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} \cdot \sqrt[3]{A-\sqrt{B}} \\
 \Rightarrow E^3 &= A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} + 3E \cdot \sqrt[3]{A^2 - (\sqrt{B})^2} \\
 \Rightarrow E^3 &= 2A + 3E \cdot \sqrt[3]{A^2 - B} \quad \therefore E^3 - 3E \cdot \sqrt[3]{A^2 - B} - 2A = 0. \quad (**)
 \end{aligned}$$

(*) Observação: Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!!!!

() Observação:** Você aprenderá a resolver equações de terceiro grau no capítulo sobre Fatoração!

Demonstração 04: Qual o valor de $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}} + \sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$?

Seja $x = \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} + \sqrt[3]{A-\sqrt{B}} \Rightarrow x + \left(-\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right) + \left(-\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right) = 0$, temos dos produtos notáveis condicionais (*):

$$\begin{aligned}
 m+n+p &= 0 \Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp \quad (*) \\
 x^3 + \left(-\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)^3 + \left(-\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)^3 &= 3 \cdot x \cdot \left(-\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right) \cdot \left(-\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right) \\
 \Rightarrow x^3 - (A + \sqrt{B}) - (A - \sqrt{B}) &= 3x \cdot \sqrt[3]{A^2 - (\sqrt{B})^2} \\
 \Rightarrow x^3 - A - \sqrt{B} - A + \sqrt{B} &= 3x \cdot \sqrt[3]{A^2 - B} \\
 \therefore x^3 - 3x \cdot \sqrt[3]{A^2 - B} - 2A &= 0. \quad (**)
 \end{aligned}$$

(*) Observação: Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!!!!

() Observação:** Você aprenderá a resolver equações de terceiro grau no capítulo sobre Fatoração!

Exemplo Resolvido 116: Determine $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$.

Resolução 01: Podemos montar a seguinte equação:

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{10+\sqrt{3 \cdot 6^2}} = \boxed{\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}}$$

$$\begin{aligned}
 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{A^2 - B} \right) - A &= 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{10^2 - 108} \right) - 10 = 0 \\
 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{100 - 108} \right) - 10 &= 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{-8} \right) - 10 = 0 \\
 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (-2) - 10 &= 0 \Rightarrow 4m^3 + 6m - 10 = 0.
 \end{aligned}$$

Usando o teorema do fator (*), note que a única raiz real dessa equação $4m^3 + 6m - 10 = 0$ é 1, ou seja $m = 1$. Assim, substituindo na outra expressão temos:

$$n = m^2 - \sqrt[3]{10^2 - 108} \Rightarrow n = 1^2 - \sqrt[3]{(-8)} \Rightarrow n = 1 - (-2) \Rightarrow n = 3.$$

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3}.$$

(*) **Observação:** Você aprenderá o teorema do fator no capítulo de Fatoração.

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})^3} \Rightarrow (A^2 + 3B)A + (3A^2 + B)\sqrt{B} = 10 + 6\sqrt{3}.$$

Por comparação, temos:

$$\begin{aligned}
 B = 3 &\Rightarrow 3A^2 + B = 6 \Rightarrow 3A^2 + 3 = 6 \Rightarrow 3A^2 = 6 - 3 \Rightarrow 3A^2 = 3 \\
 \Rightarrow A^2 = 1 &\Rightarrow A = \pm 1. \text{ (eq1) e } (A^2 + 3B)A = 10 \Rightarrow (A^2 + 3 \cdot 3)A = 10 \\
 \Rightarrow A^3 + 9A &= 10. \text{ (eq2)}
 \end{aligned}$$

Note que $A = -1$ não satisfaz (eq2). Portanto $A = 1$.

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} \Rightarrow \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}.$$

Exemplo Resolvido 117: Determine $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$.

Resolução 01: Podemos montar a seguinte equação:

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7 + \sqrt{2 \cdot 5^2}} = \boxed{\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}}$$

$$\begin{aligned}
 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{A^2 - B} \right) - A &= 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{7^2 - 50} \right) - 7 = 0 \\
 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{49 - 50} \right) - 7 &= 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{-1} \right) - 7 = 0 \\
 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (-1) - 7 &= 0 \Rightarrow 4m^3 + 3m - 7 = 0.
 \end{aligned}$$

Usando o teorema do fator (*), note que a raiz real dessa equação $4m^3 + 3m - 7 = 0$ é 1, ou seja $m = 1$. Assim, substituindo na outra expressão temos:

$$n = m^2 - 3\sqrt{7^2 - 50} \Rightarrow n = 1^2 - 3\sqrt{-1} \Rightarrow n = 1 - (-1) \Rightarrow n = 2.$$

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2}.$$

(*) **Observação:** Você aprenderá o teorema do fator no capítulo de Fatoração.

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})^3} \Rightarrow (A^2 + 3B)A + (3A^2 + B)\sqrt{B} = 7 + 5\sqrt{2}.$$

Por comparação, temos:

$$\begin{aligned} B = 2 &\Rightarrow 3A^2 + B = 5 \Rightarrow 3A^2 + 2 = 5 \Rightarrow 3A^2 = 5 - 2 \Rightarrow 3A^2 = 3 \\ &\Rightarrow A^2 = 1 \Rightarrow A = \pm 1. \text{ (eq1) e } (A^2 + 3B)A = 7 \Rightarrow (A^2 + 3 \cdot 2)A = 7 \\ &\Rightarrow A^3 + 6A = 7. \text{ (eq2)} \end{aligned}$$

Note que $A = -1$ não satisfaz (eq2). Portanto $A = 1$.

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^3} \Rightarrow \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Exemplo Resolvido 118: Determine $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$.

Resolução 01: Podemos montar a seguinte equação:

$$\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = \sqrt[3]{45 - \sqrt{2 \cdot 29^2}} = \sqrt[3]{45 - \sqrt{1682}}$$

$$4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{A^2 - B}) - A = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{45^2 - 1682}) - 45 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{2025 - 1682}) - 45 = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{343}) - 45 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot 7 - 45 = 0 \Rightarrow 4m^3 - 21m - 45 = 0.$$

Usando o teorema do fator (*), note que a raiz real dessa equação $4m^3 - 21m - 45 = 0$ é 3, ou seja $m = 3$.

Assim, substituindo na outra expressão temos:

$$n = m^2 - \sqrt[3]{(45^2 - 1682)} \Rightarrow n = 3^2 - \sqrt[3]{343} \Rightarrow n = 9 - 7 \Rightarrow n = 2.$$

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = m - \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{45 - \sqrt{1682}} = 3 - \sqrt{2}.$$

(*) Observação: Você aprenderá o teorema do fator no capítulo de Fatoração.

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(A - \sqrt{B})^3} \Rightarrow (A^2 + 3B)A - (3A^2 + B)\sqrt{B} = 45 - 29\sqrt{2}.$$

Por comparação, temos:

$$\begin{aligned} B = 2 &\Rightarrow 3A^2 + B = 29 \Rightarrow 3A^2 + 2 = 29 \Rightarrow 3A^2 = 29 - 2 \Rightarrow 3A^2 = 27 \\ &\Rightarrow A^2 = 9 \Rightarrow A = \pm 3. \text{ (eq1) e } (A^2 + 3B)A = 45 \Rightarrow (A^2 + 3 \cdot 2)A = 45 \\ &\Rightarrow A^3 + 6A = 45. \text{ (eq2)} \end{aligned}$$

Note que $A = -3$ não satisfaz (eq2). Portanto $A = 3$.

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(3 - \sqrt{2})^3} \Rightarrow \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

Exemplo Resolvido 119: Qual o valor de $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$?

Resolução 01: Seja $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = x$, $\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = y$ e $E = x + y > 0$, temos dos produtos notáveis (*):

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \Rightarrow \\ E^3 &= \left(\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}\right)^3 + 3E \cdot \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} \cdot \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} \\ &\Rightarrow E^3 = 10 + \sqrt{108} + 10 - \sqrt{108} + 3E \cdot \sqrt[3]{10^2 - (\sqrt{108})^2} \Rightarrow \\ E^3 &= 20 + 3E \cdot \sqrt[3]{100 - 108} \Rightarrow E^3 = 20 + 3E \cdot \sqrt[3]{-8} \Rightarrow E^3 = 20 + 3E \cdot (-2) \\ &\Rightarrow E^3 = 20 - 6E \therefore E^3 + 6E - 20 = 0. \text{ (**)} \end{aligned}$$

Note que, pelo teorema do fator, 2 é raiz dessa equação de terceiro grau.
Logo: $E = 2$.

(*) Observação: Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!

() Observação:** Você aprenderá a resolver equações de terceiro grau no capítulo sobre Fatoração!

Resolução 02:

$$\text{Seja } x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} \Rightarrow x^m + \left(\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} \right)^n + \left(\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} \right)^p = 0,$$

então dos produtos notáveis condicionais, temos que (*):

$$m + n + p = 0 \Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp \Rightarrow$$

$$x^3 + \left(\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} \right)^3 + \left(\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} \right)^3 = 3x \cdot \left(\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} \right) \left(\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} \right)$$

$$\Rightarrow x^3 - (10 + \sqrt{108}) - (10 - \sqrt{108}) = 3x \cdot \sqrt[3]{10^2 - (\sqrt{108})^2}$$

$$\Rightarrow x^3 - 10 - \sqrt{108} - 10 + \sqrt{108} = 3x \cdot \sqrt[3]{100 - 108}$$

$$\Rightarrow x^3 - 20 = 3x \cdot \sqrt[3]{-8} \Rightarrow x^3 - 20 = 3x \cdot (-2) \therefore x^3 + 6x - 20 = 0. \quad (**)$$

Note que, pelo teorema do fator, 2 é raiz dessa equação de terceiro grau.
Logo: $x = 2$.

(*) Observação: Esses produtos notáveis serão vistos no capítulo 5, com todos os detalhes!

() Observação:** Você aprenderá a resolver equações de terceiro grau no capítulo sobre Fatoração!

03) Radicais da forma $\sqrt[4]{A \pm \sqrt{B}}$.

Para radicais com índice 4, basta fazer radical duplo de índice 2, duas vezes. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo Resolvido 120: Mostre que $\sqrt[4]{161 + 72\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[4]{161 + 72\sqrt{5}} = \sqrt[4]{81 + 2 \cdot 9 \cdot 4\sqrt{5} + 80} \Rightarrow \sqrt[4]{161 + 72\sqrt{5}} = \sqrt[4]{(9 + 4\sqrt{5})^2}$$

$$\text{como } 9 + 4\sqrt{5} > 0, \sqrt[4]{161 + 72\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}.$$

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{4+2 \cdot 2\sqrt{2}+5} \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$$

$$\text{como } 2+\sqrt{5} > 0, \sqrt[4]{161+72\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}.$$

Exemplo Resolvido 121: Mostre que $\sqrt[4]{193-132\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[4]{193-132\sqrt{2}} = \sqrt[4]{121-2 \cdot 11 \cdot 6\sqrt{2}+72}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{193-132\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(11-6\sqrt{2})^2} \Rightarrow \sqrt[4]{193-132\sqrt{2}} = \sqrt{|11-6\sqrt{2}|}$$

$$\text{como } 11-6\sqrt{2} > 0, \sqrt[4]{193-132\sqrt{2}} = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{9-2 \cdot 3\sqrt{2}+2} \Rightarrow \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{11-6\sqrt{2}} = |3-\sqrt{2}| \text{ como } 3-\sqrt{2} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{193-132\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}.$$

Até agora, vimos radicais para cuja resolução usamos as formas $(a+b)^2$,

$(a+b)^3$ e $(a+b)^4$. Vamos ver agora aqueles em que usamos as formas

$(a+b+c)^2$ e $(a+b+c)^3$. Vamos lá:

Como $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, podemos fazer

$a = \sqrt{m}$, $b = \sqrt{n}$, $c = \sqrt{p}$, daí fica:

$$(\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2 = m + n + p + 2\sqrt{mn} + 2\sqrt{mp} + 2\sqrt{np}$$

$$\therefore (\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2 = m + n + p + \sqrt{4mn} + \sqrt{4mp} + \sqrt{4np}$$

Então temos:

04) Radicais da forma: $\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}}$.

$$\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{m + n + p + 2\sqrt{mn} + 2\sqrt{mp} + 2\sqrt{np}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{m + n + p + \sqrt{4mn} + \sqrt{4mp} + \sqrt{4np}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{(\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p}}.$$

Onde: $A = m + n + p$, $B = 4mn$, $C = 4mp$, $D = 4np$.

Exemplo Resolvido 122: Efetue $\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}.$$

Note que $m = 2$, $n = 3$, $p = 5$. Logo:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2}$$

$$\therefore \sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Exemplo Resolvido 123: Efetue $\sqrt{37 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{14} + 4\sqrt{21}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{37 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{14} + 4\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{37 + 2 \cdot \boxed{2} \cdot 3 \cdot \boxed{\sqrt{2}} \cdot \boxed{\sqrt{3}} + 2 \cdot 3 \cdot \boxed{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \boxed{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{37 + 2 \cdot \boxed{2 \cdot 3^2} \cdot \boxed{\sqrt{3 \cdot 2^2}} + 2 \cdot \boxed{2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \boxed{\sqrt{3 \cdot 2^2}} \cdot \sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{18 + 12 + 7 + 2 \cdot \boxed{\sqrt{18}} \cdot \boxed{\sqrt{12}} + 2 \cdot \boxed{\sqrt{18}} \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \boxed{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{7}}.$$

Note que $m = 18$, $n = 12$, $p = 7$. Logo:

$$E = \sqrt{37 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{14} + 4\sqrt{21}} \Rightarrow E = \sqrt{(\sqrt{18} + \sqrt{12} + \sqrt{7})^2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{18} + \sqrt{12} + \sqrt{7} \quad \therefore E = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{7}.$$

Problemas Propostos

Questão 3.24

Efetue $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$.**Questão 3.25**

Efetue $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$.**Questão 3.26**

Efetue $\sqrt{161 + 72\sqrt{5}}$.**Questão 3.27**

Efetue $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$.**Questão 3.28**

Efetue $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$.**Questão 3.29**

Efetue $\sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$.**Questão 3.30**

Efetue $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$.**Questão 3.31**

Qual o valor de $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$?**Questão 3.32**

Qual o valor de $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$?**Questão 3.33**

Qual o valor de $\sqrt{13 + \sqrt{48}}$?

Questão 3.34

Qual o valor de $\sqrt{29-12\sqrt{5}} - \sqrt{29+12\sqrt{5}}$?

Questão 3.35

Se a igualdade $\sqrt{x+2+2\sqrt{2x}} = \sqrt{11+3\sqrt{8}}$ é satisfeita, determine o valor de x.

Questão 3.36

Determine o valor de M em $\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} = \frac{M}{\sqrt{3+1}}$.

Questão 3.37

Determine o valor de $\sqrt{39-12\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

Questão 3.38 (CN-1984)

A expressão $\sqrt{3+2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} - \sqrt{3-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ é igual a:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Questão 3.39

Qual o valor de $\sqrt{43-12\sqrt{7}} - \sqrt{43+12\sqrt{7}}$?

Questão 3.40

Qual o valor de $\sqrt{53-20\sqrt{7}} - \sqrt{53+20\sqrt{7}}$?

Questão 3.41

Qual o valor de $\sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}}$?

Questão 3.42

Qual o valor de $\sqrt{172-96\sqrt{3}}$?

Questão 3.43

Qual o valor de $\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}}$?

Questão 3.44 (Princeton-2006)

Simplifique $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Questão 3.45 (AMC-2011)

Qual dos valores abaixo é igual a $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$?

- a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) 6

Questão 3.46 (AHSME-1970)

O número $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é igual a:

- a) 2 b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $\sqrt{6}$ e) $2\sqrt{2}$

Questão 3.47 (IMO-Longlist-1988 - Modificada)

Calcule o valor de x em $x = \frac{(11+6\sqrt{2}) \cdot \sqrt{11-6\sqrt{2}} - (11-6\sqrt{2}) \cdot \sqrt{11+6\sqrt{2}}}{(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}) \cdot (\sqrt{\sqrt{5}+1})}$.

Questão 3.48 (AHSME-1976)

Se $N = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, então N é igual a:

- a) 1 b) $2\sqrt{2}-1$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ e) NDA

Questão 3.49

Qual o valor de $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$?

Questão 3.50 (CN-1982)

O valor de $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ é:

- a) $1+\sqrt{7}$ b) $1+\sqrt{6}$ c) $1+\sqrt{5}$ d) $1+\sqrt{3}$ e) $1+\sqrt{2}$

Questão 3.51 (CN-2011)

O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a:

- a) $5-\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ c) $3-\sqrt{2}$
d) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$ e) 2

Questão 3.52 (Stanford-2008)

Simplifique $\sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7} + 45}{4}}$.

Questão 3.53 (IME-02/03)

Demostre que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de 4.

Questão 3.54

Mostre que $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$ é um número inteiro.

Questão 3.55 (Turquia-2007-Modificada)

Determine o valor de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

Questão 3.56 (AHSME-1980)

A soma $\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$, é igual a:

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$ c) $\frac{1 + \sqrt[6]{13}}{2}$
d) $\sqrt[3]{2}$ e) 1

Questão 3.57 (Turquia-2009-Modificada)

Determinando o valor de $x = \sqrt[3]{11 + \sqrt{337}} + \sqrt[3]{11 - \sqrt{337}}$, quanto vale $x^3 + 18x$?

Questão 3.58

Qual o valor de $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$?

Questão 3.59 (IMO-Longlist-1973)

O número $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$, é racional ou irracional?

Questão 3.60 (Suécia-2001)

Mostre que $(\sqrt{52} + 5)^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{52} - 5)^{\frac{1}{3}}$ é irracional.

Questão 3.61 (Malásia-2010)

Mostre que existem inteiros m e n , tais que $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}$.

Questão 3.62 (Irã-1989)

Mostre que $\left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right)^{\frac{1}{3}}$ é um número inteiro positivo se

$n = \frac{m(m^2 + 3)}{2}$ para algum m inteiro positivo.

Questão 3.63 (IME-90/91)

Mostre que o número $\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ é racional.

Questão 3.64 (CN-2004-Modificada)

Simplifique $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}$.

Questão 3.65

Qual o valor de $\sqrt{8} + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8}$?

Questão 3.66 (Kosovo-2013)

Prove que $\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Questão 3.67 (AIME-2006)

O número $\sqrt{104\sqrt{6} + 468\sqrt{10} + 144\sqrt{15} + 2006}$ pode ser escrito como $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, onde a , b e c são inteiros positivos. Determine abc .

Questão 3.68

Qual o valor de $\sqrt[4]{28 + 4\sqrt{48}}$?

Questão 3.69

Qual o valor de $\sqrt[4]{28 - 4\sqrt{48}}$?

Questão 3.70

Qual o valor de $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$?

Questão 3.71 (AIME-1990)

Determine $(52 + 6\sqrt{43})^{\frac{3}{2}} - (52 - 6\sqrt{43})^{\frac{3}{2}}$.

Questão 3.72 (CN-2003)

Se $a = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ e $b = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, então $a + b$ é igual a:

- a) $\sqrt{10}$ b) 4 c) $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{5} + 1$ e) $\sqrt{3} + 2$

3.4) Tópicos Avançados

Nesse tópico avançado veremos como se comporta um radical duplo com índice 3, em cuja resolução usaremos $(a+b+c)^3$. Vamos lá:

Desenvolvendo $(a+b+c)^3$, temos:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc,$$

podemos fazer $a = \sqrt[3]{m}$, $b = \sqrt[3]{n}$, $c = \sqrt[3]{p}$, daí fica:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3 = m + n + p + 3\sqrt[3]{mn^2} + 3\sqrt[3]{mp^2} + 3\sqrt[3]{m^2n} + 3\sqrt[3]{m^2p} + \\ + 3\sqrt[3]{n^2p} + 3\sqrt[3]{np^2} + 6\sqrt[3]{mnp} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3 = m + n + p + \sqrt[3]{27mn^2} + \sqrt[3]{27mp^2} + \sqrt[3]{27m^2n} + \sqrt[3]{27m^2p} + \sqrt[3]{27n^2p} + \sqrt[3]{27np^2} + \sqrt[3]{216mnp}}$$

Então, tirando a raiz cúbica, temos:

Radicais da forma: $\sqrt[3]{A + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} + \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E} + \sqrt[3]{F} + \sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{H}}$.

$$\sqrt[3]{A + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} + \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E} + \sqrt[3]{F} + \sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{H}} =$$

$$\sqrt[3]{m + n + p + \sqrt[3]{27mn^2} + \sqrt[3]{27mp^2} + \sqrt[3]{27m^2n} + \sqrt[3]{27m^2p} + \sqrt[3]{27n^2p} + \sqrt[3]{27np^2} + \sqrt[3]{216mnp}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{A + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} + \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E} + \sqrt[3]{F} + \sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{H}} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p})^3}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt[3]{A + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} + \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E} + \sqrt[3]{F} + \sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{H}} = \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}}$$

Onde:

$$A = m + n + p, B = 27mn^2, C = 27mp^2, D = 27m^2n, E = 27m^2p,$$

$$F = 27n^2p, G = 27np^2, H = 216mnp.$$

Capítulo 04 - Expressões Algébricas

Introdução

São expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. As letras nas expressões são chamadas de variáveis, o que significa que o valor de cada letra pode ser substituído por um valor numérico. Atualmente as letras associadas a números constituem a base da álgebra e contribuem de forma eficiente na resolução de várias situações matemáticas. Vamos conhecer os diversos tipos de expressões que nos ajudarão a resolver inúmeros problemas!

4.1) Tipos de Expressões Algébricas

a) Monômio

É a expressão algébrica na qual as operações entre os símbolos são somente multiplicação ou divisão.

Exemplo: $M = \frac{2}{7}x^3y^6z^4w^{11}$.

Coeficiente: $\frac{2}{7}$.

Parte Literal: $x^3y^6z^4w^{11}$.

Note que o grau de um monômio é a soma dos expoentes da parte literal. No exemplo, temos: $\text{Gr}(M) = 3 + 6 + 4 + 11 = 24$.

b) Binômio

É a soma ou diferença entre DOIS monômios.

Exemplo: $B = \frac{11}{2}a^8b^5c^4 - 5m^{11}n^3$.

Coeficientes: $\frac{11}{2}$ e 5.

Partes Literais: $a^8b^5c^4$ e $m^{11}n^3$.

Note que o grau de um binômio é a maior soma dos expoentes das partes literais. No exemplo, temos:

$\text{Gr}(B) = 8 + 5 + 4 = 17$ ou $\text{Gr}(B) = 11 + 3 = 14 \therefore \text{Gr}(B) = 17$.

c) Trinômio

É a soma ou diferença entre TRÊS monômios.

Exemplo: $T = -3a^6b + 2x^7y^3z + 1$.

Coeficientes: -3 , 2 e 1 .

Partes Literais: a^6b e x^7y^3z .

Note que o grau de um trinômio é a maior soma dos expoentes das partes literais. No exemplo, temos:

$$\text{Gr}(T) = 6 + 1 = 7 \text{ ou } \text{Gr}(T) = 7 + 3 + 1 = 11 \therefore \text{Gr}(T) = 11.$$

d) Polinômio

É a soma ou diferença entre QUATRO OU MAIS monômios.

Exemplo: $P = x^8y^8 - 2x^7y^7 + x^4y^4 + xy - 10$.

Coeficientes: 1 , -2 , 1 e 10 .

Partes Literais: x^8y^8 , x^7y^7 , x^4y^4 e xy .

Note que o grau de um polinômio é a maior soma dos expoentes das partes literais. No exemplo, temos:

$$\begin{aligned} \text{Gr}(P) &= 8 + 8 = 16 \text{ ou } \text{Gr}(P) = 7 + 7 = 14 \text{ ou } \text{Gr}(P) = 4 + 4 = 8 \\ \text{ou } \text{Gr}(P) &= 1 + 1 = 2 \therefore \text{Gr}(P) = 16. \end{aligned}$$

Observação: Podemos chamar monômios, binômios ou trinômios de polinômios, sem perda de generalidade.

4.2) Valor Numérico

O valor numérico de uma expressão algébrica é o resultado da operação que efetuamos, quando substituímos os valores das variáveis.

Exemplo Resolvido 124: Determine o valor numérico da expressão abaixo para $x = 2$.

$$2x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 11.$$

Resolução: Basta substituírmos o valor de x , então:

$$2x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 11 = 2 \cdot 2^4 - 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 11$$

$$\Rightarrow 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 11 = 32 - 8 - 16 + 10 - 11$$

$$\Rightarrow 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 11 = 7.$$

4.3) Operações com as Expressões Algébricas

a) Adição de Polinômios

A adição de polinômios é efetuada pela soma dos termos semelhantes (termos com a mesma parte literal). Conserva-se a parte literal e somam-se os coeficientes.

Exemplo Resolvido 125: Efetue $x^3y^2 + 5xy + 3x^3y^2$.

Resolução: Note que temos duas partes literais. Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$\underline{1x^3y^2} + 5xy + \underline{3x^3y^2} = 4x^3y^2 + 5xy.$$

Exemplo Resolvido 126: Efetue $3x^4y + 3xy^3 + 2z^2 + 5x^4y + 3xy^3 + 9z^2 + 1$.

Resolução: Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$\underline{3x^4y} + 3xy^3 + 2z^2 + \underline{5x^4y} + 3xy^3 + 9z^2 + 1 = \underline{8x^4y} + \underline{6xy^3} + 11z^2 + 1.$$

b) Subtração de Polinômios

A subtração de polinômios é efetuada pela soma dos termos semelhantes (termos com a mesma parte literal). Conserva-se a parte literal e subtraem-se os coeficientes.

Exemplo Resolvido 127: Efetue $-3xy^2 + 24xy^2 - 32x^2y - 4x^2y$.

Resolução: Note que temos duas partes literais. Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$\underline{-3xy^2} + \underline{24xy^2} - 32x^2y - 4x^2y = \underline{21xy^2} - 36x^2y.$$

Exemplo Resolvido 128: Efetue $xyz - 2xyz + 2ab - 5ab - mn + 7mn$.

Resolução: Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$\underline{xyz} - \underline{2xyz} + \underline{2ab} - \underline{5ab} - mn + 7mn = 6mn - \underline{3ab} - \underline{xyz}.$$

c) Multiplicação de Polinômios

Para multiplicar dois polinômios, cada termo de um polinômio deve multiplicar cada termo do outro polinômio, propriedade que chamamos de "distributiva".

Lembrando que multiplicamos os coeficientes e as partes literais de cada termo. No final, se obtivermos termos semelhantes, somamos ou subtraímos conforme a operação aparecer.

Vejamos os exemplos:

Exemplo Resolvido 129: Efetue $(-3xy)(+4x^5y^2)$.

Resolução: Note que temos duas partes literais. Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$(-3xy)(+4x^5y^2) = -12x^{1+5}y^{1+2} \Rightarrow (-3xy)(+4x^5y^2) = -12x^6y^3.$$

Exemplo Resolvido 130: Efetue $(-7x^3)(x^4y^2z - 2xyz^3)$.

Resolução: Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$(-7x^3)(x^4y^2z - 2xyz^3) = -7x^{3+4}y^2z + 7 \cdot 2x^{3+1}yz^3$$

$$\therefore (-7x^3)(x^4y^2z - 2xyz^3) = -7x^7y^2z + 14x^4yz^3.$$

Exemplo Resolvendo 131: Efetue $(ab^2 + 2abc^2)(-a^2c - b^4c + 4ab)$.

Resolução: Note que temos duas partes literais. Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$(ab^2 + 2abc^2)(a^2c - b^4c) = ab^2(-a^2c - b^4c) + 2abc^2(-a^2c - b^4c)$$

$$(ab^2 + 2abc^2)(a^2c - b^4c) = a^{1+2}b^2c + ab^{2+4}c - 2a^{1+2}bc^{2+1} - 2ab^{1+4}c^{2+1}$$

$$(ab^2 + 2abc^2)(a^2c - b^4c) = a^3b^2c + ab^6c - 2a^3bc^3 - 2ab^5c^3.$$

Exemplo Resolvido 132: Efetue $(xy - 2yz + 2xz)(x^2y^2 + x^2z^2 - y^2z^2)$.

Resolução: Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$(xy - 1)(x^3y^3 + x^2y^2 - xy + 6) = \underline{x^4y^4} + \cancel{x^3y^3} - \underline{x^2y^2} + \underline{6xy} - \cancel{x^3y^3} - \underline{x^2y^2} + xy - 6$$

$$\therefore (xy - 1)(x^3y^3 + x^2y^2 - xy + 6) = x^4y^4 - 2x^2y^2 + 7xy - 6.$$

d) Divisão de Polinômios

Na divisão de monômios, efetuamos a divisão dos coeficientes (quando possível) e efetuamos a divisão da parte literal.

Observação: Aqui, irei apenas citar a divisão de monômios, para não fugir dos objetivos deste livro.

Exemplo Resolvido 133: Efetue $\frac{(+24x^5y^2)}{(-3xy)}$.

Resolução: Note que temos duas partes literais. Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$\frac{(+24x^5y^2)}{(-3xy)} = \frac{+24}{-3} \cdot (x^{5-1}y^{2-1}) \Rightarrow \frac{(+24x^5y^2)}{(-3xy)} = -8x^4y.$$

Exemplo Resolvido 134: Efetue $\left(-\frac{5}{4}x^3\right) \div \left(\frac{15}{8}x^4y^2z\right)$.

Resolução: Conservamos a parte literal e somamos os coeficientes, o resto se repete.

$$\text{Coeficiente: } \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{4}^3} \cdot \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{15}^3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Parte Literal: } \frac{x^8}{x^4y^2z} = \frac{x^{8-4}}{y^2z} \Rightarrow \frac{x^8}{x^4y^2z} = \frac{x^4}{y^2z}.$$

$$\left(-\frac{5}{4}x^3\right) \div \left(-\frac{15}{8}x^4y^2z\right) = \frac{2x^4}{3y^2z}$$

Problemas Propostos

Questão 4.1 (CN-1952)

Efetue a multiplicação $(x^2 - 5x + 9)(x + 3)$.

Questão 4.2 (CN-1952)

Simplifique a expressão $\sqrt{16x^3y} - \sqrt{25xy^3} - (x - 5y) \cdot \sqrt{xy}$.

Capítulo 05 - Produtos Notáveis

Introdução

No cálculo algébrico, existem várias expressões algébricas (ou polinômios) cujo uso é bastante frequente em fatorações e simplificações, essas expressões são chamadas de produtos notáveis. Neste capítulo, vamos estudar essas ferramentas importantíssimas e muito eficazes nas simplificações de expressões algébricas.

5.1) Quadrado da Soma de Dois Termos

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o dobro do produtos dos dois termos, mais o quadrado do segundo termo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demonstração:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) \Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo Resolvido 135: Efetue $(2x + 3)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(2x + 3)^2 = (2x + 3) \cdot (2x + 3) \Leftrightarrow (2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2x \cdot 3 + 3 \cdot 2x + 3^2$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 = 4x^2 + 6x + 6x + 9 \therefore (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

Exemplo Resolvido 136: Efetue $(x + 2)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x + 2)^2 = (x + 2) \cdot (x + 2) \Leftrightarrow (x + 2)^2 = x^2 + x \cdot 2 + 2 \cdot x + 2^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = x^2 + 2x + 2x + 4 \therefore (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

Exemplo Resolvido 137: Efetue $(4x+1)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(4x+1)^2 &= (4x+1) \cdot (4x+1) \Leftrightarrow (4x+1)^2 = (4x)^2 + 4x \cdot 1 + 1 \cdot 4x + 1^2 \\ \Leftrightarrow (4x+1)^2 &= 16x^2 + 4x + 4x + 1 \therefore (4x+1)^2 = 16x^2 + 8x + 1.\end{aligned}$$

5.2) Quadrado da Diferença entre Dois Termos

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o dobro do produtos dos dois termos, mais o quadrado do segundo termo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b) \Leftrightarrow (a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 \\ \therefore (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 138: Efetue $(3x-2)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(3x-2)^2 &= (3x-2) \cdot (3x-2) \Leftrightarrow (3x-2)^2 = (3x)^2 - 3x \cdot 2 - 2 \cdot 3x + 2^2 \\ \Leftrightarrow (3x-2)^2 &= 9x^2 - 6x - 6x + 4 \therefore (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 139: Efetue $(3a^3 - b^2)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}E &= (3a^3 - b^2)^2 \Rightarrow E = (3a^3 - b^2) \cdot (3a^3 - b^2) \Rightarrow \\ E &= (3a^3)^2 - 3a^3 \cdot b^2 - b^2 \cdot 3a^3 + (b^2)^2 \Rightarrow E = 9a^6 - 3a^3b^2 - 3a^3b^2 + b^4 \\ \therefore (3a^3 - b^2)^2 &= 9a^6 - 6a^3b^2 + b^4.\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 140: Efetue $(a^m - 2^n)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (a^m - 2^n)^2 \Rightarrow E = (a^m - 2^n) \cdot (a^m - 2^n) \Rightarrow$$

$$E = (a^m)^2 - a^m \cdot 2^n - 2^n \cdot a^m + (2^n)^2 \Rightarrow E = a^{2m} - 2 \cdot a^m \cdot 2^n + 2^{2n}$$

$$\therefore (a^m - 2^n)^2 = a^{2m} - 2^{n+1}a^m + 2^{2n}.$$

5.3) Identidade de Legendre para a Soma

A soma dos quadrados da soma e da diferença entre dois termos é igual ao dobro da soma dos quadrados de cada termo.

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Demonstração:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2 \therefore (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Exemplo Resolvido 141: Mostre que $(7a + b^2)^2 + (7a - b^2)^2 = 2(49a^2 + b^4)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (7a + b^2)^2 + (7a - b^2)^2 \Rightarrow E = 2[(7a)^2 + (b^2)^2] \therefore E = 2(49a^2 + b^4).$$

Exemplo Resolvido 142: Mostre que $(1 + x^3)^2 + (1 - x^3)^2 = 2(1 + x^6)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (1 + x^3)^2 + (1 - x^3)^2 \Rightarrow E = 2[(1)^2 + (x^3)^2] \therefore E = 2(1 + x^6).$$

Exemplo Resolvido 143: Efetue $(9p^m + 4)^2 + (9p^m - 4)^2 = 2(81p^{2m} + 16)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (9p^m + 4)^2 + (9p^m - 4)^2 \Rightarrow E = 2[(9p^m)^2 + 4^2]$$

$$\therefore E = 2(81p^{2m} + 16).$$

5.4) Identidade de Legendre para a Diferença

A diferença entre os quadrados da soma e da diferença entre dois termos é igual a quatro vezes o produto desses dois termos.

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

Demonstração:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$\therefore (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

Exemplo Resolvido 144: Mostre que $(x^4 + 1)^2 - (x^4 - 1)^2 = 4x^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x^4 + 1)^2 - (x^4 - 1)^2 = 4 \cdot x^4 \cdot 1 \therefore (x^4 + 1)^2 - (x^4 - 1)^2 = 4x^4.$$

Exemplo Resolvido 145: $(ab + c)^2 - (ab - c)^2 = 4abc$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(ab + c)^2 - (ab - c)^2 = 4ab \cdot c \therefore (ab + c)^2 - (ab - c)^2 = 4abc.$$

Exemplo Resolvido 146: Calcule $(a^2b^3 + c^md^n)^2 - (a^2b^3 - c^md^n)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(a^2b^3 + c^md^n)^2 - (a^2b^3 - c^md^n)^2 = 4(a^2b^3) \cdot (c^md^n)$$

$$\therefore (a^2b^3 + c^md^n)^2 - (a^2b^3 - c^md^n)^2 = 4a^2b^3c^md^n.$$

5.5) Identidade de Lagrange para a Soma:

Podemos generalizar a soma de dois quadrados, e o resultado será:

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

Demonstração:

$$E = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

$$\Rightarrow E = (ax)^2 + 2 \cdot ax \cdot by + (by)^2 + (ay)^2 - 2 \cdot ay \cdot bx + (bx)^2$$

$$\Rightarrow E = a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 \Rightarrow E = a^2(x^2 + y^2) + b^2(y^2 + x^2)$$

$$\therefore \boxed{(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$$

Exemplo Resolvido 147: $(2x + 3y)^2 + (2y - 3x)^2 = 13(x^2 + y^2)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (2x + 3y)^2 + (2y - 3x)^2 \Rightarrow E = \left(2^2 + 3^2\right)(x^2 + y^2) \therefore E = 13(x^2 + y^2).$$

Exemplo Resolvido 148: Determine $(5^m x + 3^n)^2 + (5^m - 3^n x)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(5^m x + 3^n)^2 + (5^m - 3^n x)^2 = \left[(5^m)^2 + (3^n)^2\right](x^2 + 1^2)$$

$$\therefore (5^m x + 3^n)^2 + (5^m - 3^n x)^2 = (5^{2m} + 3^{2n})(x^2 + 1).$$

Exemplo Resolvido 149: Calcule $\left(\frac{a}{7} \cdot p^3 + \frac{b}{c^2} \cdot q^4\right)^2 + \left(\frac{a}{7} \cdot q^4 - \frac{b}{c^2} \cdot p^3\right)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\left(\frac{a}{7} \cdot p^3 + \frac{b}{c^2} \cdot q^4\right)^2 + \left(\frac{a}{7} \cdot q^4 - \frac{b}{c^2} \cdot p^3\right)^2 = \left[\left(\frac{a}{7}\right)^2 + \left(\frac{b}{c^2}\right)^2\right] \left[(p^3)^2 + (q^4)^2\right]$$

$$\therefore \left(\frac{a}{7} \cdot p^3 + \frac{b}{c^2} \cdot q^4\right)^2 + \left(\frac{a}{7} \cdot q^4 - \frac{b}{c^2} \cdot p^3\right)^2 = \left(\frac{a^2}{49} + \frac{b^2}{c^4}\right)(p^6 + q^8).$$

5.6) Identidade de Lagrange para a Diferença:

Podemos generalizar a diferença de dois quadrados, e o resultado será:

$$\boxed{(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)}$$

Demonstração:

$$E = (ax + by)^2 - (ay + bx)^2$$

$$\Rightarrow E = (ax)^2 + 2 \cdot ax \cdot by + (by)^2 - [(ay)^2 + 2 \cdot ay \cdot bx + (bx)^2]$$

$$\Rightarrow E = a^2x^2 + 2 \cdot ax \cdot by + b^2y^2 - a^2y^2 - 2 \cdot ay \cdot bx - b^2x^2$$

$$\Rightarrow E = a^2x^2 + b^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 \Rightarrow E = a^2(x^2 - y^2) - b^2(x^2 - y^2)$$

$$\therefore \boxed{(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)}.$$

Exemplo Resolvido 150: $(4b + 3c)^2 - (3c - 4c)^2 = 7(b^2 - c^2).$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (4b + 3c)^2 - (3c - 4c)^2 \Rightarrow E = \left(\begin{smallmatrix} 4^2 & -3^2 \\ 16 & 9 \end{smallmatrix} \right) (b^2 - c^2) \therefore E = 7(b^2 - c^2).$$

Exemplo Resolvido 151: Determine $(ab^2\sqrt{c} + 3y\sqrt{x})^2 - (ab^2\sqrt{x} + 3y\sqrt{c})^2.$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (ab^2\sqrt{c} + 3y\sqrt{x})^2 - (ab^2\sqrt{x} + 3y\sqrt{c})^2$$

$$\Rightarrow E = [(ab^2)^2 - (3y)^2] [(\sqrt{c})^2 - (\sqrt{x})^2] \therefore E = (a^2b^4 - 9y^2)(c - x).$$

Exemplo Resolvido 152: Determine

$$(a^{2009}b^{2010} + c^{2011}d^{2012})^2 - (a^{2009}d^{2012} + b^{2010}c^{2011})^2.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (a^{2009}b^{2010} + c^{2011}d^{2012})^2 - (a^{2009}d^{2012} + b^{2010}c^{2011})^2$$

$$\Rightarrow E = [(a^{2009})^2 - (c^{2011})^2] [(b^{2010})^2 - (d^{2012})^2]$$

$$\therefore E = (a^{4018} - c^{4022})(b^{4020} - d^{4024}).$$

Problemas Propostos

Questão 5.1 (Noruega-1999)

Compute $\frac{777^2 - 66^2}{777 + 66}$.

Questão 5.2 (Noruega-1999)

Se $xy = 6$ e $x^2y + xy^2 = 63$, determine $x^2 + y^2$.

Questão 5.3 (Noruega-1998)

Sejam $a \geq b$ números reais, tais que $a^2 + b^2 = 31$ e $ab = 3$. Então, quanto vale $a - b$?

Questão 5.4 (Harvard-MIT-2012)

Sejam a e b números complexos tais que $2a + 3b = 10$ e $4a^2 + 9b^2 = 20$.
Determine o valor de ab .

Questão 5.5 (AHSME-1958)

Se $xy = b$ e $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a$, então $(x + y)^2$ é igual a:

- a) $(a + 2b)^2$ b) $a^2 + b^2$
c) $b(ab + 2)$ d) $ab(b + 2)$

Questão 5.6 (Noruega-1998)

Seja p o maior fator primo de 9991. Então, a soma dos algarismos de p vale?

Questão 5.7 (Putnam-2001-Modificada)

Simplifique $x^4 - (2n - 4)x^2 + (n - 2)^2$.

Questão 5.8

Se a igualdade $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{2x}} = \sqrt{11 + 3\sqrt{6}}$ é satisfeita, determine o valor de x .

Questão 5.9 (AHSME-1955)

Se r e s são as três raízes da equação $x^2 - px + q = 0$, então $r^2 + s^2$, é:

- a) $p^2 + 2q$ b) $p^2 - 2q$ c) $p^2 + q^2$
d) $p^2 - q^2$ e) p^2

Questão 5.10 (Singapura-2014)

Se α e β são as raízes da equação $3x^2 + x - 1 = 0$, onde $\alpha > \beta$, determine o

valor de $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$.

Questão 5.11 (AHSME-1951)

Se r e s são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, determine $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$:

- a) $b^2 - 4ac$ b) $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$ c) $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$
d) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$ e) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

Questão 5.12 (Hungria)

Sejam a , b , c e d números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$. Se

$ac + bd = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine o valor positivo de $ad - bc$.

Questão 5.13 (Harvard/MIT-2008)

Suponha que a , b , c , d são números reais satisfazendo $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$,

$a^2 + d^2 = 1$, $b^2 + c^2 = 1$ e $ac + bd = \frac{1}{3}$. Determine $ab - cd$.

Questão 5.14 (Eötvös-1933)

Sejam a , b , c e d números reais tais que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Se $ac + bd = 0$, determine o valor de $ab - cd$.

Questão 5.15 (Índia-1998-Modificada)

Mostre que $(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = (ac + 3bd)^2 + 3(ad - bc)^2$.

Questão 5.16 (Hong Kong-2002)

Sejam x_1, x_2, y_1 e y_2 números reais, satisfazendo as equações $x_1^2 + 5x_2^2 = 10$, $x_2y_1 - x_1y_2 = 5$ e $x_1y_1 + 5x_2y_2 = \sqrt{105}$. Qual o valor de $x_1y_1 + 5x_2y_2 = \sqrt{105}$?

Questão 5.17 (Eslovênia-2010/ Kosovo-2013)

Sejam a e b números reais, tais que $|a| \neq |b|$ e $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 6$.

Determine $\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.

Questão 5.18 (Júnior Balkan-1997)

Dados x e y reais com $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k$, determine $\frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8}$ em termos de k .

A soma de dois quadrados pode ser escrita de duas maneiras: a primeira é em forma de quadrado da soma, e a segunda é em forma de quadrado da diferença.

5.7) Soma de Dois Quadrados em Forma de Soma:

A primeira escrita é em forma de quadrado da soma.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

Demonstração:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \therefore \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

Exemplo Resolvido 153: Reescreva $49 + x^2$ como quadrado da soma.

Resolução: Podemos escrever:

$$49 + x^2 = 7^2 + x^2 \Rightarrow 49 + x^2 = (7 + x)^2 - 2 \cdot 7 \cdot x$$

$$\therefore 49 + x^2 = (7 + x)^2 - 14x.$$

Exemplo Resolvido 154: Reescreva $16x^2 + 121$ como quadrado da soma.

Resolução: Podemos escrever:

$$16x^2 + 121 = (4x)^2 + 11^2 \Rightarrow 16x^2 + 121 = (4x + 11)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 11$$

$$\therefore 16x^2 + 121 = (4x + 11)^2 - 88x.$$

5.8) Soma de Dois Quadrados em Forma de Diferença:

A segunda escrita é em forma de quadrado da diferença.

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

Demonstração:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \therefore \quad a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab.$$

Exemplo Resolvido 155: Reescreva $4a^4b^2 + \frac{c^8}{25}$ como quadrado da diferença.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 4a^4b^2 + \frac{c^8}{25} \Rightarrow E = (2a^2b)^2 + \left(\frac{c^4}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow E = \left(2a^2b - \frac{c^4}{5}\right)^2 + 2 \cdot 2a^2b \cdot \frac{c^4}{5} \therefore E = \left(2a^2b - \frac{c^4}{5}\right)^2 + \frac{4a^2bc^4}{5}.$$

Exemplo Resolvido 156: Reescreva $9x^{2p} + 25y^{4q}$ como quadrado da diferença.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = 9x^{2p} + 25y^{4q} \Rightarrow E = (3x^p)^2 + (5y^{2q})^2 \Rightarrow$$

$$E = (3x^p - 5y^{2q})^2 + 2 \cdot 3x^p \cdot 5y^{2q} \therefore E = (3x^p - 5y^{2q})^2 + 30x^p \cdot y^{2q}.$$

5.9) Produto da Soma pela Diferença:

O produto da soma de dois termos pela diferença desses mesmos dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Demonstração:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 \therefore (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

Generalizações do Produto da Soma pela Diferença:

Podemos generalizar o produto da soma pela diferença entre dois termos, como veremos a seguir.

a) Binômio Soma e Diferença com Potência

O produto de um binômio soma pelo binômio diferença é igual ao quadrado do primeiro monômio menos o quadrado do segundo monômio.

$$(a^m + b^n) \cdot (a^m - b^n) = a^{2m} - b^{2n}$$

Demonstração:

$$(a^m + b^n) \cdot (a^m - b^n) = a^{2m} - a^m \cdot b^n + a^m \cdot b^n - b^{2n}$$

$$\therefore (a^m + b^n) \cdot (a^m - b^n) = a^{2m} - b^{2n}$$

b) Generalização para uma Potência n.

O produto da diferença pela soma das potências de dois termos em PG é igual à diferença entre quadrados com a potência consecutiva.

$$(a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2+b^2) \cdot (a^4+b^4) \cdot \dots \cdot (a^{2^n}+b^{2^n}) = a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}$$

Demonstração:

$$E = (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2+b^2) \cdot (a^4+b^4) \cdot \dots \cdot (a^{2^n}+b^{2^n})$$

$$\Rightarrow E = (a^2-b^2) \cdot (a^2+b^2) \cdot (a^4+b^4) \cdot \dots \cdot (a^{2^n}+b^{2^n})$$

$$\Rightarrow E = (a^4-b^4) \cdot (a^4+b^4) \cdot \dots \cdot (a^{2^n}+b^{2^n})$$

$$\Rightarrow E = (a^8-b^8) \cdot \dots \cdot (a^{2^n}+b^{2^n}) = \dots$$

$$\therefore (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2+b^2) \cdot (a^4+b^4) \cdot \dots \cdot (a^{2^n}+b^{2^n}) = a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}$$

Exemplo Resolvido 157: Efetue $(2a+3b) \cdot (2a-3b)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(2a+3b) \cdot (2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 \quad \therefore (2a+3b) \cdot (2a-3b) = 4a^2 - 9b^2.$$

Exemplo Resolvido 158: Efetue $(m^n+p^q) \cdot (m^n-p^q)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(m^n+p^q)(m^n-p^q) = (m^n)^2 - (p^q)^2 \quad \therefore (m^n+p^q)(m^n-p^q) = m^{2n} - p^{2q}.$$

Exemplo Resolvido 159: Efetue $(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2+4) \cdot \dots \cdot (x^{2^m}+2^{2^m})$.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2+4) \cdot (x^4+16) \cdot \dots \cdot (x^{2^m}+2^{2^m})$$

$$\Rightarrow E = (x^2-4) \cdot (x^2+4) \cdot (x^4+16) \cdot \dots \cdot (x^{2^m}+2^{2^m})$$

$$\Rightarrow E = (x^4-16) \cdot (x^4+16) \cdot \dots \cdot (x^{2^m}+2^{2^m}) \dots$$

$$\therefore (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2+4) \cdot (x^4+16) \cdot \dots \cdot (x^{2^m}+2^{2^m}) = x^{2^{m+1}} - 2^{2^{m+1}}.$$

Veremos agora os produtos notáveis que tem relação com as equações do 2º grau. São chamados de identidades de Stevin. São pouco usadas devido à sua simplicidade, mas são identidades importantes numa prova que exija rapidez!

5.10) Identidades de Stevin para Dois Termos:

a) Produto entre dois binômios soma, com termo comum:

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Demonstração:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab \quad \therefore \quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

b) Produto entre um binômio soma e um binômio diferença, com termo comum:

$$(x + a) \cdot (x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$$

Demonstração:

$$(x + a)(x - b) = x^2 - bx + ax - ab \quad \therefore \quad (x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab.$$

c) Produto entre dois binômios diferença, com termo comum:

$$(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

Demonstração:

$$(x - a)(x - b) = x^2 - bx - ax + ab \quad \therefore \quad (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab.$$

Exemplo Resolvido 160: Efetue $(x + 2) \cdot (x + 3)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 \quad \therefore \quad (x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + 5x + 6.$$

Exemplo Resolvido 161: Efetue $(x + ab) \cdot (x - bc)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x + ab) \cdot (x - bc) = x^2 + (ab - bc)x - ab \cdot bc$$

$$\therefore (x + ab) \cdot (x - bc) = x^2 + (a - c)bx - ab^2c.$$

Exemplo Resolvido 162: Efetue $(x - abc) \cdot (x - bcd)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x - abc) \cdot (x - bcd) = x^2 - (abc + bcd)x + abc \cdot bcd$$

$$\therefore (x - abc) \cdot (x - bcd) = x^2 - (a + d)bcx + ab^2c^2d.$$

Consequência, para $x = 1$, temos:

Se substituirmos $x = 1$ nas identidades de Stevin, teremos identidades bem interessantes, vejamos:

$$a) \quad (1+a) \cdot (1+b) = 1^2 + (a+b) \cdot 1 + ab \quad \therefore \quad (1+a) \cdot (1+b) = a + b + ab + 1.$$

$$b) \quad (1+a) \cdot (1-b) = 1^2 + (a-b) \cdot 1 - ab \quad \therefore \quad (1+a) \cdot (1-b) = a - b - ab + 1.$$

$$c) \quad (1-a) \cdot (1-b) = 1^2 - (a+b) \cdot 1 + ab \quad \therefore \quad (1-a) \cdot (1-b) = ab - a - b + 1.$$

Generalizações das Identidades de Stevin:

Podemos generalizar as identidades de Stevin, como segue:

a) **Produto entre dois binômios soma, com termo comum:**

$$(x^m + a) \cdot (x^m + b) = x^{2m} + (a + b)x^m + ab$$

Demonstração:

$$(x^m + a) \cdot (x^m + b) = x^{2m} + bx^m + ax^m + ab$$

$$\therefore (x^m + a) \cdot (x^m + b) = x^{2m} + (a + b)x^m + ab.$$

b) **Produto entre um binômio soma e um binômio diferença, com termo comum:**

$$(x^m + a) \cdot (x^m - b) = x^{2m} + (a - b)x^m - ab$$

Demonstração:

$$(x^m + a) \cdot (x^m - b) = x^{2m} - bx^m + ax^m - ab$$

$$\therefore (x^m + a) \cdot (x^m - b) = x^{2m} + (a - b)x^m - ab.$$

c) Produto entre dois binômios diferença, com termo comum:

$$(x^m - a) \cdot (x^m - b) = x^{2m} - (a + b)x^m + ab$$

Demonstração:

$$(x^m - a) \cdot (x^m - b) = x^{2m} - bx^m - ax^m + ab$$

$$\therefore (x^m - a) \cdot (x^m - b) = x^{2m} - (a + b)x^m + ab.$$

Exemplo Resolvido 163: Efetue $(2x^7 + 3) \cdot (2x^7 + 5)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(2x^7 + 3) \cdot (2x^7 + 5) = (2x^7)^2 + \overbrace{(3+5)}^8 \cdot 2x^7 + 3 \cdot 5$$

$$\therefore (2x^7 + 3) \cdot (2x^7 + 5) = 4x^{14} + 16x^7 + 15.$$

Exemplo Resolvido 164: Efetue $(a^{2016} + 2b^3) \cdot (a^{2016} - 3c^4)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(a^{2016} + 2b^3) \cdot (a^{2016} - 3c^4) = (a^{2016})^2 + (2b^3 - 3c^4)a^{2016} - 2b^3 \cdot 3c^4$$

$$\therefore (a^{2016} + 2b^3) \cdot (a^{2016} - 3c^4) = a^{4032} + (2b^3 - 3c^4)a^{2016} - 6b^3c^4.$$

Exemplo Resolvido 165: Efetue $(p^{m^n} - a^x) \cdot (p^{m^n} - b^y)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(p^{m^n} - a^x) \cdot (p^{m^n} - b^y) = (p^{m^n})^2 + (a^x + b^y) \cdot p^{m^n} - a^x \cdot b^y$$

$$\therefore (p^{m^n} - a^x) \cdot (p^{m^n} - b^y) = p^{2m^n} - (a^x + b^y)p^{m^n} + a^xb^y.$$

De um modo geral, podemos escrever as identidades de Stevin das seguintes maneiras:

- a) Produto entre dois binômios soma (genéricos), com termo comum:

$$(ax + b) \cdot (cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Demonstração:

$$(ax + b) \cdot (cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd$$

$$\therefore (ax + b) \cdot (cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

- b) Produto entre dois binômios diferença (genéricos), com termo comum:

$$(ax - b) \cdot (cx - d) = acx^2 - (ad + bc)x + bd$$

Demonstração:

$$(ax - b) \cdot (cx - d) = acx^2 - adx - bcx + bd$$

$$\therefore (ax - b) \cdot (cx - d) = acx^2 - (ad + bc)x + bd.$$

- c) Produto entre um binômio soma e um binômio diferença (genéricos), com termo comum:

$$(ax + b) \cdot (cx - d) = acx^2 + (bc - ad)x - bd$$

Demonstração:

$$(ax + b) \cdot (cx - d) = acx^2 - adx + bcx - bd$$

$$\therefore (ax + b) \cdot (cx - d) = acx^2 + (bc - ad)x - bd.$$

- d) Produto entre um binômio diferença e um binômio soma (genéricos), com termo comum:

$$(ax - b) \cdot (cx + d) = acx^2 + (ad - bc)x - bd$$

Demonstração:

$$(ax - b) \cdot (cx + d) = acx^2 + adx - bcx - bd$$

$$\therefore (ax - b) \cdot (cx + d) = acx^2 + (ad - bc)x - bd.$$

Exemplo Resolvido 166: Efetue $(2x+5) \cdot (3x+4)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(2x+5) \cdot (3x+4) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 + \left(\overset{8}{2 \cdot 4} + \overset{15}{5 \cdot 3} \right) \cdot x + 5 \cdot 4$$

$$\therefore (2x+5) \cdot (3x+4) = 6x^2 + 23x + 20.$$

Exemplo Resolvido 167: Efetue $(x-3) \cdot (7x-2)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x-3) \cdot (7x-2) = 1 \cdot 7 \cdot x^2 + \left(\overset{2}{1 \cdot 2} + \overset{21}{3 \cdot 7} \right) \cdot x + 3 \cdot 2$$

$$\therefore (x-3) \cdot (7x-2) = 7x^2 - 23x + 6.$$

Exemplo Resolvido 168: Efetue $(5a+2) \cdot (9a-3)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(5a+2) \cdot (9a-3) = 5 \cdot 9 \cdot a^2 + \left(\overset{18}{2 \cdot 9} - \overset{15}{5 \cdot 3} \right) \cdot a - 2 \cdot 3$$

$$\therefore (5a+2) \cdot (9a-3) = 45a^2 + 3a - 6.$$

Exemplo Resolvido 169: Efetue $(ax-4) \cdot (3x+b)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(ax-4) \cdot (3x+b) = a \cdot 3 \cdot x^2 + (a \cdot b + 3 \cdot 4) \cdot x + 3 \cdot 2$$

$$\therefore (ax-4) \cdot (3x+b) = 3ax^2 + (ab-12)x - 4b.$$

Problemas Propostos

Questão 5.19 (CN-1954)

Decomponha $16x^4 - 1$ em três fatores.

Questão 5.20 (Harvard-MIT-2009)

Determine o valor da soma $11^2 - 1^2 + 12^2 - 2^2 + 13^2 - 3^2 + \dots + 20^2 - 10^2$.

Questão 5.21 (Turquia-2007-Modificada)

Determine o valor de $(100^2 - 99^2)(99^2 - 98^2) \dots (3^2 - 2^2)(2^2 - 1^2)$.

Questão 5.22 (OCM-1998-Modificada)

Determine o valor de $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 1998^2 + 1999^2$.

Questão 5.23 (Moscou 1945)

Divida $a^{2^7} - b^{2^7}$ por $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{2^6}+b^{2^6})$.

Questão 5.24 (Moscou 1945)

Divida $a^{2^k} - b^{2^k}$ por $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})$.

Questão 5.25 (Moscou 1946)

Prove que, depois de completar a multiplicação e agrupar os termos de $(1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}x^{100}) \cdot (1+x+x^2+\dots+x^{99}+x^{100})$, não haverá monômios de grau ímpar.

Questão 5.26 (CN-2005)

Simplificando-se a fração $\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}$, onde $a > b$, obtém-se:

a) $a^2 - b^2 - 2ab$

b) $a^2 - b^2 + 2ab$

c) $a^2 + b^2 - 2ab$

d) $a^2 + b^2 + 2ab$

e) $a^2 + b^2$

Questão 5.27 (AHSME-1951 / CN-1998)

Simplificando a expressão $\sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 1}{2x^2}\right)^2} - \frac{x^2}{2}$, para $x \in \mathbb{R}^*$, obtém-se:

a) $\frac{1}{2x^2}$

b) $\frac{x^4 + x^2 - 1}{2x^2}$

c) $\frac{x^4 - x^2 - 1}{2x^2}$

d) $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}$

e) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$

Questão 5.28

Simplifique $(a + b - c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 - 2[(c - a - b)^2 - d^2]$.

Questão 5.29

Simplifique $(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^{12} + a^6b^6 + b^{12})$.

Questão 5.30 (CN-1991)

Simplificando a expressão abaixo, para os valores a, b e c que não anulam o denominador, obtém-se:

$$\frac{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a + b - c)}{(a + b + c)(a^2 + c^2 - 2ac - b^2)}$$

a) 1

b) 2

c) 3

d) $a + b + c$

e) $a - b + c$

Até agora, vimos os produtos notáveis de expoente dois, ou seja, elevados ao quadrado, agora veremos os produtos de expoente três, ou seja, elevados ao cubo, vamos lá!

5.11) Cubo da Soma de Dois Termos

O cubo da soma de dois termos é igual ao primeiro termo elevado ao cubo mais três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, mais o segundo termo elevado ao cubo.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Demonstração:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) \Leftrightarrow (a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$\therefore (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Exemplo Resolvido 170: Desenvolva $(x+3)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x+3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 \quad \therefore (x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$$

Exemplo Resolvido 171: Desenvolva $(3x+2)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(3x+2)^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 + 2^3$$

$$\therefore (3x+2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.$$

5.12) Cubo da diferença de Dois Termos:

O cubo da diferença entre dois termos é igual ao primeiro termo elevado ao cubo menos três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, menos o segundo termo elevado ao cubo.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Demonstração:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2 \cdot (a-b) \Leftrightarrow (a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a-b)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$\therefore (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Exemplo Resolvido 172: Desenvolva $(x-2)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x-2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 \quad \therefore (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

Exemplo Resolvido 173: Desenvolva $(x-2y)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x-2y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3$$

$$\therefore (3x-2)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3.$$

5.13) Cubo da Soma mais Cubo da Diferença:

Quando somamos o cubo da soma com o cubo da diferença, obtemos um produto notável interessante: o dobro do primeiro termo que multiplica o quadrado do primeiro termo mais três vezes o quadrado do segundo termo.

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$$

Demonstração:

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 \quad \therefore (a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2).$$

Exemplo Resolvido 174: Efetue $(x+3)^3 + (x-3)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x+3)^3 + (x-3)^3 = 2 \cdot x(x^2 + 3 \cdot 3^2) \Rightarrow (x+3)^3 + (x-3)^3 = 2x(x^2 + 27)$$

$$\therefore (x+3)^3 + (x-3)^3 = 2x^3 + 54x.$$

Exemplo Resolvido 175: Efetue $(2x+5)^3 + (2x-5)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(2x+5)^3 + (2x-5)^3 = 2 \cdot (2x) \left[(2x)^2 + 3 \cdot 5^2 \right] \Rightarrow$$

$$(2x+5)^3 + (2x-5)^3 = 4x(4x^2 + 75) \therefore (2x+5)^3 + (2x-5)^3 = 16x^3 + 300x.$$

5.14) Cubo da Soma menos Cubo da Diferença:

Quando subtraímos o cubo da diferença do cubo da soma, obtemos um produto notável interessante: o dobro do segundo termo que multiplica três vezes o quadrado do primeiro termo mais o quadrado do segundo termo.

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$$

Demonstração:

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$$

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3 \therefore (a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2).$$

Exemplo Resolvido 176: Efetue $(x+5)^3 - (x-5)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x+5)^3 - (x-5)^3 = 2 \cdot 5(3 \cdot x^2 + 5^2) \Rightarrow (x+5)^3 - (x-5)^3 = 10(3x^2 + 25)$$

$$\Rightarrow (x+5)^3 - (x-5)^3 = 30x^2 + 250.$$

Exemplo Resolvido 177: $(3x+7)^3 - (3x-7)^3 = 378x^2 + 686$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(3x+7)^3 - (3x-7)^3 = 2 \cdot 7 \left[3 \cdot (3x)^2 + 7^2 \right]$$

$$\Rightarrow (3x+7)^3 - (3x-7)^3 = 14(27x^2 + 49)$$

$$\Rightarrow (3x+7)^3 - (3x-7)^3 = 378x^2 + 686.$$

5.15) Identidade de Cauchy (Soma):

Podemos escrever o cubo da soma de um modo mais cômodo, é a chamada identidade de Cauchy:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

Demonstração:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \therefore \quad (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

Exemplo Resolvido 178: Desenvolva $(m + 10)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(m + 10)^3 &= m^3 + 10^3 + 3 \cdot m \cdot 10(m + 10) \\ \Rightarrow (m + 10)^3 &= m^3 + 1000 + 30m(m + 10).\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 179: Desenvolva $(3n + 4)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(3n + 4)^3 &= (3n)^3 + 4^3 + 3 \cdot (3n) \cdot 4(3n + 4) \\ \Rightarrow (3n + 4)^3 &= 27n^3 + 64 + 36n(3n + 4).\end{aligned}$$

5.16) Identidade de Cauchy (Diferença):

Podemos escrever o cubo da diferença de um modo mais cômodo, é a chamada identidade de Cauchy:

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Demonstração:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \therefore \quad (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Veremos como expressar a soma de cubos e a diferença de cubos. Podemos escrevê-las a partir das identidades de Cauchy, temos também a forma fatorada, que são chamados de produtos de Warring.

a) Soma de cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

Demonstração:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \quad \therefore \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b).$$

b) Diferença de cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$.

Demonstração:

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \quad \therefore \quad a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b).$$

c) Soma de cubos (Warring): $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 &= (a+b)[a^2 + 2ab + b^2 - 3ab] \quad \therefore \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

d) Diferença de cubos (Warring): $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \Leftrightarrow a^3 - b^3 = (a-b)[(a-b)^2 + 3ab] \\ \Leftrightarrow a^3 - b^3 &= (a-b)[a^2 - 2ab + b^2 + 3ab] \quad \therefore \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 180: Efetue $x^3 + 4^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$x^3 + 4^3 = (x+4)^3 - 3 \cdot x \cdot 4(x+4) \Rightarrow x^3 + 4^3 = (x+4)^3 - 12x(x+4).$$

Exemplo Resolvido 181: Efetue $(2m)^3 - 3^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(2m)^3 - 3^3 &= (2m - 3)^3 + 3 \cdot (2m) \cdot 3(2m - 3) \\ \Rightarrow (2m)^3 - 3^3 &= (2m - 3)^3 + 18m(2m - 3).\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 182: Efetue $(5a)^3 + (2b)^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(5a)^3 + (2b)^3 &= (5a + 2b) \left[(5a)^2 - (5a) \cdot (2b) + (2b)^2 \right] \\ \Rightarrow (5a)^3 + (2b)^3 &= (5a + 2b) (25a^2 - 10ab + 4b^2).\end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 183: Efetue $(11x)^3 - y^3$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(11x)^3 - y^3 &= (11x - y) \left[(11x)^2 + (11x) \cdot y + y^2 \right] \\ \Rightarrow (11x)^3 - y^3 &= (11x - y) (121x^2 + 11xy + y^2).\end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 5.31 (Harvard-MIT-2007)

Sejam x e y dois números reais tais que $x - y = 4$ e $x^3 - y^3 = 28$. Determine xy .

Questão 5.32 (CN-2006)

Simplificando-se a fração $\frac{x(x^2 + x - y) + y^2(y + 1)}{x^2 + y^2 - xy}$, $x^2 + y^2 - xy \neq 0$, obtém-se:

- a) $x - y + 1$ b) $x - y - 1$ c) $x + y - 1$
d) $1 + x + y$ e) $1 - x + y$

Questão 5.33 (CN-1980)

Simplificando $\frac{(2x^2 - 4x + 8)(x^2 - 4)}{\sqrt{2} \cdot x^3 + \sqrt{128}}$, vamos encontrar:

- a) $\sqrt{2}(x + 2)$ b) $\sqrt{2}(x - 2)$ c) $\sqrt{2}(x^2 - 4)$
d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Questão 5.34 (CN-1983)

Simplificando a fração $\frac{(x^2z + zy^2 + 2xyz)(x^2 - y^2)}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$, vamos encontrar:

- a) $z(x + y)$ b) $z(x - y)$ c) $zx + y$
d) $zx - y$ e) $z + y$

Questão 5.35

Simplifique $\frac{(a + b)^2 - 4(a^2 + b^2)}{(a^3 + b^3)^2 - (a^2 + b^2)^3}$.

Questão 5.36 (AHSME-1952)

$$\left(\frac{(x+1)^2 \cdot (x^2 - x + 1)}{(x^3 + 1)^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{(x-1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)}{(x^3 - 1)^2} \right)^2, \text{ quando simplificado, é:}$$

- a) $(x+1)^4$ b) $(x^3+1)^4$ c) 1
- d) $\left[(x^3+1)(x^3-1) \right]^2$ e) $\left[(x^3-1)^2 \right]^2$

Questão 5.37

Determine $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$.

Questão 5.38 (Harvard/MIT-2000)

Calcule $2000^3 - 1999 \cdot 2000^2 - 1999^2 \cdot 2000 + 1999^3$.

Questão 5.39 (Harvard/MIT-2007)

Calcule $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \frac{6^3-1}{6^3+1}$.

Questão 5.40 (Stanford-2012)

Calcule $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{16^3-1}{16^3+1}$.

Desenvolveremos agora a quarta potência de dois termos e a utilizaremos para desenvolver potências de termos recíprocos.

5.17) Quarta Potência da Soma:

A quarta potência da soma é dada por

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Demonstração:

$$(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) \Leftrightarrow (a + b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$

$$\therefore (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Exemplo Resolvido 184: Desenvolva $(x + 2)^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x + 2)^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$$

$$\Rightarrow (x + 2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

Exemplo Resolvido 185: Desenvolva $(2x + 3)^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(2x + 3)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot 3 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot (2x) \cdot 3^3 + 3^4$$

$$\therefore (2x + 3)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81.$$

5.18) Quarta Potência da Diferença:

A quarta potência da diferença é dada por

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Demonstração:

$$(a - b)^4 = (a - b)^3 \cdot (a - b) \Leftrightarrow (a - b)^4 = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)(a - b)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^4 = a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 - a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^3 + b^4$$

$$\therefore \boxed{(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}.$$

Exemplo Resolvido 186: Desenvolva $(x-1)^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x-1)^4 = x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot 1 + 6 \cdot x^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot x \cdot 1^3 + 1^4$$

$$\Rightarrow (x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Exemplo Resolvido 187: Desenvolva $(4m-3)^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(4m-3)^4 = (4m)^4 - 4 \cdot \overset{64m^3}{(4m)^3} \cdot 3 + 6 \cdot \overset{16m^2}{(4m)^2} \cdot 3^2 - 4 \cdot (4m) \cdot \overset{27}{3^3} + 3^4$$

$$\therefore (4m-3)^4 = 256m^4 - 768m^3 + 864m^2 - 432m + 81.$$

5.19 Identidade de Legendre (Soma):

Somando as duas identidades anteriores, chegamos à identidade da soma de Legendre para à quarta potência.

$$\boxed{(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2(a^2 + b^2)^2 + 8a^2b^2}$$

Demonstração:

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2a^4 + 2a^2b^2 + 8a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2b^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^4 + (a-b)^4 = 2a^2(a^2 + b^2) + 2b^2(a^2 + b^2) + 8a^2b^2$$

$$\therefore \boxed{(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2(a^2 + b^2)^2 + 8a^2b^2}.$$

Exemplo Resolvido 188: Efetue $(3x+4y)^4 + (3x-4y)^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 (3x+4y)^4 + (3x-4y)^4 &= 2 \cdot \left[(3x)^2 + (4y)^2 \right]^2 + 8 \cdot (3x)^2 \cdot (4y)^2 \\
 \Rightarrow (3x+4y)^4 + (3x-4y)^4 &= 2(9x^2 + 16y^2)^2 + 1152x^2y^2 \\
 \Rightarrow (3x+4y)^4 + (3x-4y)^4 &= 2(81x^4 + 288x^2y^2 + 256y^4) + 1152x^2y^2 \\
 \Rightarrow (3x+4y)^4 + (3x-4y)^4 &= 162x^4 + 576x^2y^2 + 512y^4 + 1152x^2y^2 \\
 \therefore (3x+4y)^4 + (3x-4y)^4 &= 162x^4 + 1728x^2y^2 + 512y^4.
 \end{aligned}$$

5.20) Identidade de Legendre (Diferença):

Subtraindo as duas identidades anteriores, chegamos à identidade da diferença de Legendre para a quarta potência.

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^4 - (a-b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - \\
 &\quad - (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) \\
 (a+b)^4 - (a-b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - a^4 + 4a^3b - \\
 &\quad - 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 (a+b)^4 - (a-b)^4 &= 8a^3b + 8ab^3 \therefore \boxed{(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)}.
 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 189: Efetue $(7x+2y)^4 - (7x-2y)^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 (7x+2y)^4 - (7x-2y)^4 &= 8 \cdot (7x) \cdot (2y) \left[(7x)^2 + (2y)^2 \right] \\
 \Rightarrow (7x+2y)^4 - (7x-2y)^4 &= 112xy(49x^2 + 4y^2).
 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 190: Efetue $(11m+5n)^4 - (11m-5n)^4$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(11m + 5n)^4 - (11m - 5n)^4 = 8 \cdot (11m) \cdot (5n) [(11m)^2 + (5n)^2]$$

$$\Rightarrow (11m + 5n)^4 - (11m - 5n)^4 = 440mn(121m^2 + 25n^2).$$

5.21) Quinta Potência da Soma:

A quinta potência da soma é dada por

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Demonstração:

$$(a + b)^5 = (a + b)^4 \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^5 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$\therefore (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Exemplo Resolvido 191: Desenvolva $(x+1)^5$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x+1)^5 = x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 1 + 10 \cdot x^3 \cdot 1^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 1^3 + 5 \cdot x \cdot 1^4 + 1^5$$

$$\Rightarrow (x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

5.22) Vamos desenvolver a quinta potência da diferença:

A quinta potência da diferença é dada por

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Demonstração:

$$(a - b)^5 = (a - b)^4 \cdot (a - b)$$

$$(a - b)^5 = (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) \cdot (a - b)$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 4a^2b^3 + ab^4 - a^4b + 4a^3b^2 - 6a^2b^3 + 4ab^4 - b^5$$

$$\therefore (a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

$$\Rightarrow (2x+5)^5 + (2x-5)^5 = 4x(16x^4 + 1000x^2 + 3125)$$

$$\Rightarrow (2x+5)^5 + (2x-5)^5 = 64x^5 + 4000x^3 + 12500x.$$

5.24) A Diferença das Quintas Potências da Soma e da Diferença:

A diferença entre os dois produtos notáveis anteriores é dada por

$$(a+b)^5 + (a-b)^5 = 2b(5a^4 + 10a^2b^2 + b^4)$$

Demonstração:

$$(a+b)^5 - (a-b)^5 = \cancel{a^5} + 5a^4b + \cancel{10a^3b^2} + 10a^2b^3 + \cancel{5ab^4} + b^5 -$$

$$- (\cancel{a^5} - 5a^4b + \cancel{10a^3b^2} - 10a^2b^3 + \cancel{5ab^4} - b^5)$$

$$(a+b)^5 - (a-b)^5 = 10a^4b + 20a^2b^3 + 2b^5$$

$$\therefore (a+b)^5 + (a-b)^5 = 2b(5a^4 + 10a^2b^2 + b^4)$$

Exemplo Resolvido 195: Determine $(2m+3)^5 + (2m-3)^5$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(2m+3)^5 + (2m-3)^5 = 2 \cdot 3 \cdot \left[\underbrace{5 \cdot (2m)^4}_{16m^4} + 10 \cdot \underbrace{(2m)^2 \cdot 3^2}_{4m^2 \cdot 9} + 3^4 \right]$$

$$\Rightarrow (2m+3)^5 + (2m-3)^5 = 6(80m^4 + 360m^2 + 81)$$

$$\Rightarrow (2m+3)^5 + (2m-3)^5 = 480m^4 + 2160m^2 + 486.$$

Exemplo Resolvido 196: Determine $(t+1)^5 + (t-1)^5$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(t+1)^5 + (t-1)^5 = 2 \cdot 1 \cdot (5 \cdot t^4 + 10 \cdot t^2 \cdot 1^2 + 1^4)$$

$$\Rightarrow (t+1)^5 + (t-1)^5 = 2 \cdot (5t^4 + 10t^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (t+1)^5 + (t-1)^5 = 10t^4 + 20t^2 + 2.$$

Problemas Propostos

Questão 5.41

Dado $a^2 + b^2 = k$ e $ab = x$. Determine $(a+b)^4$ e $(a-b)^4$.

Questão 5.42

Sejam x e y números reais positivos satisfazendo $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$.

Determine xy .

Questão 5.43

Dados x e y reais com $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k$, determine $\frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8}$ em termos de k .

Questão 5.44 (IMO-Longlist-1992-Adaptada)

Simplifique $\frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$.

Questão 5.45

Sejam a e b números reais não nulos tais que x e y satisfazem o sistema

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ ax^2 + by^2 = 20 \\ ax^3 + by^3 = 56 \\ ax^4 + by^4 = 272 \end{cases}$$

Determine o valor de $ax^5 + by^5$.

Questão 5.46 (AIME-1990/Harvard-MIT-2009)

Determine $ax^5 + by^5$ se os números reais a , b , x e y satisfazem as equações $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$, $ax^4 + by^4 = 42$.

Questão 5.47 (OBM XXXI - 2ª Fase - Nível 2)

Determine $ax^5 + by^5$ se os números reais a , b , x e y satisfazem as equações $ax + by = 1$, $ax^2 + by^2 = 2$, $ax^3 + by^3 = 5$, $ax^4 + by^4 = 6$.

Questão 5.48 (AMC-2007)

Suponha que o número a satisfaça a equação $a + a^{-1} = 4$. Qual o valor de $a^4 + a^{-4}$?

- a) 169
- b) 172
- c) 192
- d) 194
- e) 212

Vamos agora desenvolver a soma de termos recíprocos $x^n + \frac{1}{x^n}$, dada a condição $x + \frac{1}{x} = k$, com $k \geq 2$. Primeiramente iremos ver algumas regras práticas, ao final veremos sua generalização.

5.25) Soma de Termos Recíprocos:

a) Soma dos quadrados de termos recíprocos, dada a sua soma.

A soma dos quadrados de dois termos recíprocos é dada por

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$$

Demonstração:

$$x + \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = k^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = k^2 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$$

b) A soma dos cubos de termos recíprocos, dada a sua soma.

A soma dos cubos de termos recíprocos é dada por

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k$$

Demonstração:

$$x + \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = k^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 3x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = k^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x + 3\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = k^3 \Leftrightarrow x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = k^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3k + \frac{1}{x^3} = k^3 \therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k$$

c) A soma das quartas potências de termos recíprocos, dada a sua soma.

A soma das quartas potências de termos recíprocos é dada por

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = k^4 - 4k^2 + 2$$

Demonstração:

$$x + \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 6x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 6 + 4\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^4} = k^4 \Leftrightarrow x^4 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 + \frac{1}{x^4} = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4(k^2 - 2) + 6 + \frac{1}{x^4} = k^4 \Leftrightarrow x^4 + 4k^2 - 8 + 6 + \frac{1}{x^4} = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4k^2 - 2 + \frac{1}{x^4} = k^4 \therefore \boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = k^4 - 4k^2 + 2}$$

d) A soma das quintas potências de termos recíprocos, dada a sua soma.

A soma das quintas potências de termos recíprocos é dada por

$$\boxed{x^5 + \frac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 5k}$$

Demonstração:

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 = k^5$$

$$\Rightarrow x^5 + 5x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 10x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 10x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^5 = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 + 5x^3 + 10x + 10 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{x^5} = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 + 5\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^5} = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 + 5(k^3 - 3k) + 10k + \frac{1}{x^5} = k^5 \Leftrightarrow x^5 + 5k^3 - 15k + 10k + \frac{1}{x^5} = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 + 5k^3 - 5k + \frac{1}{x^5} = k^5 \therefore \boxed{x^5 + \frac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 5k}$$

e) A soma das sextas potências de termos recíprocos, dada a sua soma.

A soma das sextas potências de termos recíprocos é dada por

$$\boxed{x^6 + \frac{1}{x^6} = k^6 - 6k^4 + 9k^2 - 2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 &= x^6 + 6x^4 + 20 + 15x^2 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6} \\
 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 &= x^6 + \frac{1}{x^6} + 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 20 \\
 \Rightarrow k^6 &= x^6 + \frac{1}{x^6} + 6(k^4 - 4k^2 + 2) + 15(k^2 - 2) + 20 \\
 \Rightarrow k^6 &= x^6 + \frac{1}{x^6} + 6k^4 - 24k^2 + 12 + 15k^2 - 30 + 20 \\
 \Rightarrow k^6 &= x^6 + \frac{1}{x^6} + 6k^4 - 9k^2 + 2 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = k^6 - 6k^4 + 9k^2 - 2.
 \end{aligned}$$

Observação: Com um pouco de manipulação algébrica, podemos escrever a soma das sextas potências da seguinte forma:

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = (k^2 - 2)(k^4 - 4k^2 + 1).$$

Generalizando por equação do 2º grau e lembrando que $k \geq 2$.

Podemos generalizar a soma da enésima potência resolvendo a equação do segundo grau formada, assim sua solução geral é dada por:

$$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{x} &= k \Leftrightarrow x^2 + 1 = kx \Leftrightarrow x^2 - kx + 1 = 0; \quad \Delta = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\
 \therefore \Delta &= k^2 - 4 \geq 0; \quad x = \frac{-(-k) \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2 \cdot 1} \therefore x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.
 \end{aligned}$$

Se $x = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$, então:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{2}{k + \sqrt{k^2 - 4}} \right)^n.$$

Se $x = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$, então:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{2}{k - \sqrt{k^2 - 4}} \right)^n.$$

Observação: Os primeiros desenvolvimentos são formas práticas e rápidas, fica a cargo do leitor decorá-las ou não.

Vamos agora desenvolver a soma de termos recíprocos $x^n + \frac{1}{x^n}$, dada a

condição $x - \frac{1}{x} = k$, com $k \geq 2$. Primeiramente iremos ver algumas regras práticas, ao final veremos sua generalização.

5.26) Diferença de Termos Recíprocos:

a) Soma dos quadrados de termos recíprocos, dada a sua diferença.

A soma dos quadrados de dois termos recíprocos é dada por

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 + 2$$

Demonstração:

$$x - \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = k^2 \Rightarrow x^2 - 2x \left(\frac{1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x} \right)^2 = k^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = k^2 \quad \therefore \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 + 2.$$

b) A diferença dos cubos de termos recíprocos, dada a sua diferença.

A diferença dos cubos de termos recíprocos é dada por

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = k^3 + 3k$$

Demonstração:

$$x - \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x} \right)^3 = k^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} \right) + 3x \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^2 - \left(\frac{1}{x} \right)^3 = k^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3} = k^3 \Leftrightarrow x^3 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3} = k^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3k - \frac{1}{x^3} = k^3 \quad \therefore \quad \boxed{x^3 - \frac{1}{x^3} = k^3 + 3k}.$$

c) A soma das quartas potências de termos recíprocos, dada a sua diferença.

A soma das quartas potências de termos recíprocos é dada por

$$\boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = k^4 + 4k^2 + 2}$$

Demonstração:

$$x - \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 6x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 6 - 4\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^4} = k^4 \Leftrightarrow x^4 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 + \frac{1}{x^4} = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4\left(k^2 + 2\right) + 6 + \frac{1}{x^4} = k^4 \Leftrightarrow x^4 - 4k^2 - 8 + 6 + \frac{1}{x^4} = k^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4k^2 - 2 + \frac{1}{x^4} = k^4 \quad \therefore \quad \boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = k^4 + 4k^2 + 2}.$$

d) A diferença das quintas potências de termos recíprocos, dada a sua diferença.

A diferença das quintas potências de termos recíprocos é dada por

$$\boxed{x^5 - \frac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 5k}$$

Demonstração:

$$x - \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^5 = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 5x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 10x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 10x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 - \left(\frac{1}{x}\right)^5 = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 5x^3 + 10x - 10 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x^5} = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 5\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + 10\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5} = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 5(k^3 + 3k) + 10k - \frac{1}{x^5} = k^5 \Leftrightarrow x^5 - 5k^3 - 15k + 10k - \frac{1}{x^5} = k^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 5k^3 - 5k - \frac{1}{x^5} = k^5 \therefore \boxed{x^5 - \frac{1}{x^5} = k^5 + 5k^3 + 5k}.$$

e) A soma das sextas potências de termos recíprocos, dada a sua diferença.

A soma das sextas potências de termos recíprocos é dada por

$$\boxed{x^6 + \frac{1}{x^6} = k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}$$

Demonstração:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

$$\Rightarrow k^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} - 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 20$$

$$\Rightarrow k^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} - 6\left(k^4 + 4k^2 + 2\right) + 15\left(k^2 + 2\right) - 20$$

$$\Rightarrow k^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} - 6k^4 - 24k^2 - 12 + 15k^2 + 30 - 20$$

$$\Rightarrow k^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} - 6k^4 - 9k^2 - 2 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2.$$

Observação: Com um pouco de manipulação, podemos escrever:

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = (k^2 + 2)(k^4 + 4k^2 + 1).$$

Generalizando por equação do 2º grau e lembrando que $k \geq 2$.

Podemos generalizar a soma da enésima potência resolvendo a equação do segundo grau formada, assim sua solução geral é dada por:

$$\boxed{x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}}$$

Demonstração:

$$x - \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow x^2 - 1 = kx \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0; \quad \Delta = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$\therefore \Delta = k^2 + 4 \geq 0; \quad x = \frac{-(-k) \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2 \cdot 1} \therefore x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}.$$

Aqui temos que considerar dois casos:

Para n ímpar:

Se $x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$, então:

$$x^n - \frac{1}{x^n} = \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{2}{k + \sqrt{k^2 + 4}} \right)^n.$$

Se $x = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$, então:

$$x^n - \frac{1}{x^n} = \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{2}{k - \sqrt{k^2 + 4}} \right)^n.$$

Para n par:

Se $x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$, então:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{2}{k + \sqrt{k^2 + 4}} \right)^n.$$

Se $x = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$, então:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{2}{k - \sqrt{k^2 + 4}} \right)^n.$$

Exemplo Resolvido 197: Sabendo que $x + \frac{1}{x} = 16$, qual o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 16^2 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 256 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 254.$$

Exemplo Resolvido 198: Sabendo que $x + \frac{1}{x} = 10$, qual o valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 10^3 - 3 \cdot 10 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 1000 - 30 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 970.$$

Exemplo Resolvido 199: Sabendo que $x + \frac{1}{x} = 6$, determine o valor de

$$x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{1}{x^4} &= 6^4 - 4 \cdot 6^2 + 2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 1296 - 4 \cdot 36 + 2 \\ \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} &= 1298 - 144 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 1154. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 200: Sabendo que $x + \frac{1}{x} = 5$, determine o valor de

$$x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} x^5 + \frac{1}{x^5} &= 5^5 - 5 \cdot 5^3 + 5 \cdot 5 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 3125 - 625 + 25 \\ \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} &= 2525. \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 201: Sabendo que $x + \frac{1}{x} = 3$, determine o valor de $x^6 + \frac{1}{x^6}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 3^6 - 6 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^2 - 2 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 729 - 6 \cdot 81 + 9 \cdot 9 - 2$$

$$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 729 - 486 + 81 - 2 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 322.$$

Exemplo Resolvido 202: Se $x + \frac{1}{x} = 2$, qual o valor de $x^{100} + \frac{1}{x^{100}}$?

Resolução: Podemos escrever:

$$E = x^{100} + \frac{1}{x^{100}} \Rightarrow E = \left(\frac{2 + \sqrt{2^2 - 4}}{2} \right)^{100} + \left(\frac{2}{2 + \sqrt{2^2 - 4}} \right)^{100}$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{2}{2} \right)^{100} + \left(\frac{2}{2} \right)^{100} \Rightarrow E = 1^{100} + 1^{100} \therefore x^{100} + \frac{1}{x^{100}} = 2.$$

Agora veremos as identidades para três variáveis, identidades muito úteis no desenvolvimento das relações de Girard (polinômios) e também em fatorações.

5.27) Quadrado da Soma de Três Termos:

O quadrado da soma de três termos é igual ao quadrado de cada um dos três termos mais o dobro dos produtos tomados dois a dois.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Demonstração:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) \Leftrightarrow$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Consequências do quadrado da soma de três termos:

a) O segundo termo é negativo:

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ac - ab - bc)$$

Demonstração:

$$(a - b + c)^2 = (a - b + c) \cdot (a - b + c) \Leftrightarrow$$

$$(a - b + c)^2 = a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2$$

$$\Leftrightarrow (a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$\therefore (a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ac - ab - bc)$$

b) O terceiro termo é negativo:

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc)$$

Demonstração:

$$(a + b - c)^2 = (a + b - c) \cdot (a + b - c) \Leftrightarrow$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + ab - ac + ab + b^2 - bc - ac - bc + c^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$\therefore (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc)$$

c) O segundo e o terceiro termos são negativos:

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc - ab - ac)$$

Demonstração:

$$(a - b - c)^2 = (a - b - c) \cdot (a - b - c)$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 - ab - ac - ab + b^2 + bc - ac + bc + c^2$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$\therefore (a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc - ab - ac)$$

Exemplo Resolvido 203: Desenvolva $(a + 2b + 3c)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(a + 2b + 3c)^2 = a^2 + (2b)^2 + (3c)^2 + 2[(a \cdot 2b) + (a \cdot 3c) + (2b \cdot 3c)]$$

$$\Rightarrow (a + 2b + 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 2(2ab + 3ac + 6bc)$$

$$\Rightarrow (a + 2b + 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab + 6ac + 12bc.$$

Exemplo Resolvido 204: Desenvolva $(4 - 2m + n)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(4 - 2m + n)^2 = 4^2 + (2m)^2 + n^2 + 2[4n - (4 \cdot 2m) - (2m \cdot n)]$$

$$\Rightarrow (4 - 2m + n)^2 = 16 + 4m^2 + n^2 + 2(4n - 8m - 2mn)$$

$$\Rightarrow (4 - 2m + n)^2 = 16 + 4m^2 + n^2 + 8n - 16m - 4mn.$$

Exemplo Resolvido 205: Desenvolva $(x + y - 2z)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x + y - 2z)^2 = x^2 + y^2 + (2z)^2 + 2(xy - x \cdot 2z - y \cdot 2z)$$

$$\Rightarrow (x + y - 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2(xy - 2xz - 2yz)$$

$$\Rightarrow (x + y - 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz.$$

Exemplo Resolvido 206: Desenvolva $(1 - x - y)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(1 - x - y)^2 = 1^2 + x^2 + y^2 + 2(x \cdot y - 1 \cdot x - 1 \cdot y)$$

$$\Rightarrow (1 - x - y)^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2(xy - x - y)$$

$$\Rightarrow (1 - x - y)^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y.$$

5.28) Identidade de Lagrange para Três Termos:

A identidade de Lagrange para três termos é útil em fatorações mais rebuscadas, cuja percepção do leitor esteja bem apurada.

$$(ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 E &= (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \\
 \Rightarrow E &= (ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 + \cancel{2ax \cdot by} + \cancel{2ax \cdot cz} + \cancel{2by \cdot cz} + (ay)^2 - \\
 &\quad - \cancel{2ay \cdot bx} + (bx)^2 + (az)^2 - \cancel{2az \cdot cx} + (cx)^2 + (bz)^2 - \cancel{2bz \cdot cy} + (cy)^2 \\
 \Rightarrow E &= \underline{a^2x^2} + \underline{b^2y^2} + c^2z^2 + \underline{a^2y^2} + \underline{b^2x^2} + \underline{a^2z^2} + c^2x^2 + \underline{b^2z^2} + c^2y^2 \\
 \Rightarrow E &= a^2(x^2 + y^2 + z^2) + b^2(y^2 + x^2 + z^2) + c^2(z^2 + x^2 + y^2)
 \end{aligned}$$

$$(ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

Exemplo 207: Desenvolva $(x + 2y + 3z)^2 + (y - 2x)^2 + (z - 3x)^2 + (2z - 3y)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 (x + 2y + 3z)^2 + (y - 2x)^2 + (z - 3x)^2 + (2z - 3y)^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\
 (x + 2y + 3z)^2 + (y - 2x)^2 + (z - 3x)^2 + (2z - 3y)^2 &= 14(x^2 + y^2 + z^2).
 \end{aligned}$$

5.29) Produto Dois a Dois Elevado ao Quadrado:

Podemos também desenvolver a soma dos produtos dois a dois elevado ao quadrado, segue o mesmo raciocínio da soma de três termos:

$$(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc(a + b + c)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 E &= (ab + bc + ac)^2 \Rightarrow E = (ab + bc + ac) \cdot (ab + bc + ac) \Leftrightarrow \\
 E &= a^2b^2 + ab^2c + a^2bc + ab^2c + b^2c^2 + abc^2 + a^2bc + abc^2 + a^2c^2 \\
 (ab + bc + ac)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \\
 \therefore (ab + bc + ac)^2 &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc(a + b + c).
 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 208: Desenvolva $(2y + yz + 2z)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 (2y + yz + 2z)^2 &= (2y)^2 + (yz)^2 + (2z)^2 + 2 \cdot 2 \cdot yz(2 + y + z) \\
 \Rightarrow (2y + yz + 2z)^2 &= 4y^2 + y^2z^2 + 4z^2 + 4yz(2 + y + z).
 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 209: Desenvolva $(m + 4mn + 4n)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(m + m \cdot 4n + 4n)^2 &= (1 \cdot m)^2 + (m \cdot 4n)^2 + (1 \cdot 4n)^2 + 2 \cdot 1 \cdot m \cdot 4n(1 + m + 4n) \\ \Rightarrow (m + 4mn + 4n)^2 &= m^2 + 16m^2n^2 + 16n^2 + 8mn(1 + m + 4n).\end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 5.49 (AHSME-1952-1954 / CN-1986)

Se $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$, então $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é igual a:

- a) 1 b) 2 c) 0
d) 3 e) 6

Questão 5.50 (CN-2014)

Seja x um número real, tal que $x + \frac{3}{x} = 9$. Um possível valor de $x - \frac{3}{x}$ é \sqrt{a} .

Sendo assim, a soma dos algarismos de "a" será:

- a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

Questão 5.51

Seja x um número real não nulo tal que $x + \frac{1}{x} = 4$, se $x^3 + \frac{1}{x^3} = m$ e

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = n, \text{ determine o valor de } \frac{m+n}{m-n}.$$

Questão 5.52 (AMC-2007)

Suponha que o número a satisfaça a equação $4 = a + a^{-1}$. Qual o valor de $a^4 + a^{-4}$?

- a) 169 b) 172 c) 192
d) 194 e) 212

Questão 5.53 (Stanford-2010)

Se $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, determine o valor de $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Questão 5.54

Se $x + \frac{1}{x} = 1$, determine o valor de $\sqrt[5]{x^5 + \frac{1}{x^5}}$.

Questão 5.55 (Singapura)

Se $x^2 - 4x + 1 = 0$, determine o valor de $\frac{x^6 + \frac{1}{x^6} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 2}{x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^3}$.

Questão 5.56

Se $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$, determine o valor de $x^7 + \frac{1}{x^7}$.

Questão 5.57

Seja r um número real, tal que $\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 3$. Calcule o valor de $r^3 + \frac{1}{r^3}$.

Questão 5.58

Seja r um número real positivo, tal que $\sqrt[4]{r} - \frac{1}{\sqrt[4]{r}} = 14$. Prove que $\sqrt[6]{r} + \frac{1}{\sqrt[6]{r}} = 6$.

Questão 5.59 (CN-1984)

Se $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{8}{3}$ e $x + y + z = 16$, o produto xyz é:

- a) 192 b) 48 c) 32 d) 108 e) 96

Questão 5.60 (CN-1999)

Se $m + n + p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 11$, podemos dizer que o valor de

$\frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn}$ é:

- a) 1 b) 3 c) 7 d) 18 e) 22

Questão 5.61 (CN-2011)

Sejam a , b e c números reais, tais que $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = p$, $ab + bc + ac = r$ e

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = q$. O valor de $q^2 + 6q$ é sempre igual a:

- a) $\frac{p^2 r^2 + 9}{4}$ b) $\frac{p^2 r^2 - 9p}{12}$ c) $p^2 r^2 - 9$
 d) $\frac{p^2 r^2 - 10}{4r}$ e) $p^2 r^2 - 12p$

Questão 5.62 (Harvard/MIT-2008)

As raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 8x + 2 = 0$ são p , q , r . Calcule $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}$.

Questão 5.63 (AHSME-1981)

Para todo número positivo x , y e z , o produto

$(x + y + z)^{-1} \cdot (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}) \cdot (xy + yz + xz)^{-1} \cdot [(xy)^{-1} + (yz)^{-1} + (xz)^{-1}]$ é

igual a:

- a) $x^{-2} \cdot y^{-2} \cdot z^{-2}$ b) $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}$
 c) $(x + y + z)^{-1}$ d) $\frac{1}{xyz}$
 e) $\frac{1}{xy + yz + xz}$

Questão 5.64 (AHSME-1991)

Se $x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20$, então $x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}}$ é igual a:

- a) 5,05 b) 20 c) 51,005 d) 61,25 e) 400

Questão 5.65

Calcule o valor de $\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^5 + \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^5$.

Questão 5.66

Determine o valor de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$.

Questão 5.67 (CN-1998)

Sejam $x = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997} + (2-\sqrt{3})^{1997}}{2}$ e $y = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997} - (2-\sqrt{3})^{1997}}{\sqrt{3}}$, o

valor de $4x^2 - 3y^2$ é:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

5.30) Identidades de Argand:

Outra identidade que requer uma boa criatividade do leitores é a identidade de Argand, também encontrada em olimpíadas de Matemática e em colégios militares. A identidade de Argand é dada por:

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

Demonstração:

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 - a^3b + a^2b^2 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 + a^2b^2 - ab^3 + b^4$$

$$\therefore (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4.$$

Consequência para $b = 1$:

Esse caso particular da identidade de Argand é bastante útil:

$$(a^2 + a \cdot 1 + 1^2)(a^2 - a \cdot 1 + 1^2) = a^4 + a^2 \cdot 1^2 + 1^4$$

$$\therefore (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = a^4 + a^2 + 1.$$

Generalizando a Identidade de Argand, temos:

Podemos generalizar a identidade de Argand para a soma de uma potência qualquer, assim temos:

$$(a^{2m} + a^m \cdot b^n + b^{2n})(a^{2m} - a^m \cdot b^n + b^{2n}) = a^{4m} + a^{2m} \cdot b^{2n} + b^{4n}$$

Demonstração:

$$(a^{2m} + a^m \cdot b^n + b^{2n})(a^{2m} - a^m \cdot b^n + b^{2n}) = a^{4m} - \cancel{a^{3m}b^n} + \cancel{a^{2m}b^{2n}} +$$

$$+ \cancel{a^{3m}b^n} - \cancel{a^{2m}b^{2n}} + \cancel{a^mb^{3n}} + a^{2m}b^{2n} - \cancel{a^mb^{3n}} + b^{4n}$$

$$(a^{2m} + a^m \cdot b^n + b^{2n})(a^{2m} - a^m \cdot b^n + b^{2n}) = a^{4m} + a^{2m} \cdot b^{2n} + b^{4n}.$$

Exemplo Resolvido 210: Efetue $(4p^2 + 2pq + q^2)(4p^2 - 2pq + q^2)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(4p^2 + 2pq + q^2)(4p^2 - 2pq + q^2) = (2p)^4 + (2p)^2 \cdot q^2 + q^4$$

$$\Rightarrow (4p^2 + 2pq + q^2)(4p^2 - 2pq + q^2) = 16p^4 + 4p^2q^2 + q^4.$$

Exemplo Resolvido 211: Efetue $(49t^2 + 7t + 1)(49t^2 - 7t + 1)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(49t^2 + 7t + 1)(49t^2 - 7t + 1) = (7t)^4 + (7t)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (49t^2 + 7t + 1)(49t^2 - 7t + 1) = 2401t^4 + 49t^2 + 1.$$

Exemplo Resolvido 212: Efetue

$$[(xy)^{2m} + (xy)^m \cdot (3z)^n + (3z)^{2n}] [(xy)^{2m} - (xy)^m \cdot (3z)^n + (3z)^{2n}]$$

Resolução: Podemos escrever:

$$E = [(xy)^{2m} + (xy)^m \cdot (3z)^n + (3z)^{2n}] [(xy)^{2m} - (xy)^m \cdot (3z)^n + (3z)^{2n}]$$

$$\Rightarrow E = (xy)^{4m} + (xy)^{2m} \cdot (3z)^{2n} + (3z)^{4n}$$

$$\therefore E = x^{4m} y^{4m} + x^{2m} y^{2m} \cdot 3^{2n} z^{2n} + 3^{4n} z^{4n}.$$

Agora veremos a identidade para quatro variáveis ao quadrado, ou seja, o quadrado da soma de quatro termos.

5.31) Quadrado da Soma de Quatro Termos:

O quadrado de quatro termos é igual à soma dos quadrados de cada termo mais o dobro dos produtos tomados dois a dois.

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

Demonstração:

$$(a + b + c + d)^2 = (a + b + c + d) \cdot (a + b + c + d)$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + ab + ac + ad + ab + b^2 + bc + bd + ac + bc + c^2 + \\ + cd + ad + bd + cd + d^2$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\therefore (a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Exemplo Resolvido 213: Desenvolva $(x + 2y + 2z + 1)^2$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(x + 2y + 2z + 1)^2 &= x^2 + (2y)^2 + (2z)^2 + 1^2 + \\ &\quad + 2[(x \cdot 2y) + (x \cdot 2z) + (x \cdot 1) + (2y \cdot 2z) + (2y \cdot 1) + (2z \cdot 1)] \\ (x + 2y + 2z + 1)^2 &= x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 1 + 2(2xy + 2xz + x + 4yz + 2y + 2z).\end{aligned}$$

O caso seguinte é a soma de três termos elevado ao cubo, ou seja $(a + b + c)^3$, vamos desenvolvê-lo!

5.32) Cubo da Soma de Três Termos:

O cubo da soma de três termos é dado por:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 &= (a + b + c)^2 \cdot (a + b + c) \\ \Leftrightarrow (a + b + c)^3 &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) \cdot (a + b + c) \\ \Leftrightarrow (a + b + c)^3 &= a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b + 2a^2c + 2abc + a^2b + b^3 + bc^2 + \\ &\quad + 2ab^2 + 2abc + 2b^2c + a^2c + b^2c + c^3 + 2abc + 2ac^2 + 2bc^2 \\ \therefore (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.\end{aligned}$$

Podemos escrever essa soma de outras quatro formas, a saber:

a) Forma de soma dois a dois

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b + c) + 3b^2(a + c) + 3c^2(a + b) + 6abc$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + \underline{3ab^2} + 3ac^2 + \underline{3a^2b} + \underline{3a^2c} + \underline{3b^2c} + 3bc^2 + 6abc \\ \therefore (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b + c) + 3b^2(a + c) + 3c^2(a + b) + 6abc.\end{aligned}$$

b) Como soma dos quadrados da soma dos três termos:

$$(a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

Demonstração:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$(a + b + c)^3 = 3a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc - 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$(a + b + c)^3 = \underline{3a^3} + \underline{3b^3} + 3c^3 + \underline{3ab^2} + 3ac^2 + \underline{3a^2b} + \underline{3a^2c} + \underline{3b^2c} + 3bc^2 - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

$$(a + b + c)^3 = 3a^2(a + b + c) + 3b^2(a + b + c) + 3c^2(a + b + c) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

$$\therefore (a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc.$$

c) Como produto dois a dois:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$$

Demonstração:

$$E = (a + b + c)^3$$

$$E = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$E = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 3abc + 3abc$$

$$E = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 3abc + 3abc + 3abc - 3abc$$

$$E = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) - 3abc$$

$$\therefore (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc.$$

d) Como produto da soma dois a dois:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

Demonstração:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 3abc + 3abc$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(a + c) + 3bc(a + b)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3b(a+b)(a+c) + 3c(a+c)(a+b)$$

$$\therefore (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c).$$

Consequências (Identidade de Gauss):

Podemos escrever a identidade de Gauss de duas formas:

a) Como soma de quadrados simples:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Demonstração:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc = (a+b+c)^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc = (a+b+c)^2(a+b+c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)(a+b+c) - 3(a+b+c)(ab+ac+bc) + 3abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c) \cdot$$

$$\left[a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 3(ab + ac + bc) \right] + 3abc$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

b) Como soma de quadrados da diferença:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c) \cdot \left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \right]}{2}$$

Demonstração:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c) \cdot 2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}{2}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c) \cdot (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)}{2}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2)}{2}$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c) \cdot [(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]}{2}$$

Veremos agora a soma de quatro termos elevada ao cubo! É interessante a forma com que podemos escrevê-la, você notará quando estiver nas identidades condicionais lá na frente, vamos lá!

5.33) Soma de quatro termos elevado ao cubo:

A soma de quatro termos elevada ao cubo é dada por:

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3ab(c+d) - 3cd(a+b) + 3(a+b+c+d) \cdot (ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Demonstração:

$$(a+b+c+d)^3 = (a+b+c+d)^2 \cdot (a+b+c+d) \Leftrightarrow$$

$$(a+b+c+d)^3 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd) \cdot (a+b+c+d)$$

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + ba^2 + ca^2 + da^2 + ab^2 + b^3 + cb^2 + db^2 + ac^2 + bc^2 + c^3 + dc^2 + ad^2 + bd^2 + cd^2 + d^3 + 2a^2b + 2ab^2 + 2abc + 2abd + 2a^2c + 2abc + 2ac^2 + 2acd + 2a^2d + 2abd + 2acd + 2ad^2 + 2abc + 2b^2c + 2bc^2 + 2bcd + 2abd + 2b^2d + 2bcd + 2bd^2 + 2acd + 2bcd + 2c^2d + 2cd^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3ab^2 + 3b^2c + 3b^2d + 3ac^2 + 3bc^2 + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + 6abc + 6abd + 6acd + 6bcd + 3abc - 3abc + 3abd - 3abd + 3acd - 3acd + 3bcd - 3bcd$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3ab(a+b+c+d) + 3ac(a+b+c+d) + 3ad(a+b+c+d) + 3bc(a+b+c+d) + 3bd(a+b+c+d) + 3cd(a+b+c+d) - 3abc - 3abd - 3acd - 3bcd$$

$$\therefore (a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3ab(c+d) - 3cd(a+b) + 3(a+b+c+d) \cdot (ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Veremos agora a quarta potência de três termos! Observe como podemos escrevê-la, você notará quando estiver na parte de identidades condicionais, vamos lá!

5.34) Quarta Potência de Três Termos:

A quarta potência de três termos é dada por:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) - 2(ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^4 &= \left[(a+b+c)^2 \right]^2 \\ \Rightarrow (a+b+c)^4 &= \left[(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+ac+bc) \right]^2 \\ \Rightarrow (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(ab)^2 + 2(ac)^2 + 2(bc)^2 + \\ &\quad + 4(ab+ac+bc)^2 + 4 \left[(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) \right] (ab+ac+bc) \\ \Rightarrow (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(ab)^2 + 2(ac)^2 + 2(bc)^2 - \\ &\quad - 8(ab+ac+bc)^2 + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) + 4(ab+ac+bc)^2 \\ \Rightarrow (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(ab)^2 + 2(ac)^2 + 2(bc)^2 - \\ &\quad - 4(ab+ac+bc)^2 + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) \\ \Rightarrow (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(ab)^2 + 2(ac)^2 + 2(bc)^2 + \\ &\quad + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) - 4 \left[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2abc(a+b+c) \right] \\ \Rightarrow (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 - 2(ab)^2 - 2(ac)^2 - 2(bc)^2 - \\ &\quad - 8abc(a+b+c) + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) \\ \Rightarrow (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) - \\ &\quad - 2abc(a+b+c) - 2 \left[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2abc(a+b+c) \right] \\ \therefore (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) - \\ &\quad - 2(ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c) \end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 5.68 (IMO-Longlist-1988 / AHSME-1975)

Se p , q e r são as raízes distintas da equação $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, então

$p^3 + q^3 + r^3$ é igual a:

- a) -1 b) 1 c) 3 d) 5 e) NDA

Questão 5.69 (Putnam-1939-Modificada)

As raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são α , β e γ . Determine $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Questão 5.70 (AIME-2008)

Sejam r , s e t as três raízes da equação $8x^3 + 1001x + 2008 = 0$. Determine $(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3$.

Questão 5.71 (Stanford-2007)

Se $r+s+t=3$, $r^2+s^2+t^2=1$ e $r^3+s^3+t^3=3$, calcule $r \cdot s \cdot t$.

Questão 5.72 (Stanford-2007)

As raízes de $x^3 - 7x^2 - 6x + 5 = 0$ são a , b e c . Calcule $(a+b)(a+c)(b+c)$.

Questão 5.73

Sabendo que $A = \frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1) \dots (32^4 + 32^2 + 1)}{(1^4 + 1^2 + 1)(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1) \dots (31^4 + 31^2 + 1)}$,

determine o valor de $A - 1053$.

Questão 5.74

Mostre que $(xy + yz + xz)^3 = (xy)^3 + (yz)^3 + (xz)^3 + 3xyz(x+y)(x+z)(y+z)$.

Questão 5.75 (Noruega-1996-Modificada)

Sejam x , y e z números naturais com $x < y < z$, tais que $xyz = 78$ e

$x^2 + y^2 + z^2 = 206$. Determine o valor de $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xy + xz + yz}$.

Questão 5.76

Efetue $(a^2 - ab + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \dots (a^{2^n} - a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}} + b^{2^n})$, para $a \neq \pm b$.

Agora veremos uma importante identidade que relaciona produtos notáveis com equações do terceiro grau. Nos exercícios veremos uma resolução usando essa identidade!

5.35) Identidade de Stevin Para Três Termos:

A identidade de Stevin para três termos tem relação com as equações do 3º grau, veremos as raízes positivas e as negativas.

a) Todas as Raízes Positivas

$$(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

Demonstração:

$$(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) = (x^2 + ax + bx + ab) \cdot (x+c)$$

$$(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) = x^3 + ax^2 + bx^2 + abx + cx^2 + acx + bcx + abc$$

$$\therefore (x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

b) Todas as Raízes Negativas

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

Demonstração:

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) = (x^2 - ax - bx + ab) \cdot (x-c)$$

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) = x^3 - ax^2 - bx^2 + abx - cx^2 + acx + bcx - abc$$

$$\therefore (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

c) Quatro Raízes Positivas

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$$

Demonstração:

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) = (x^2 - ax - bx + ab) \cdot (x^2 - cx - dx + cd)$$

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) = x^4 - \underline{ax^3} - \underline{bx^3} + \underline{abx^2} - \underline{cx^3} + \underline{acx^2} + \underline{bcx^2} - \underline{abcx} - \underline{dix^3} + \underline{adx^2} + \underline{bdx^2} - \underline{abdx} + \underline{cdx^2} - \underline{acdx} - \underline{bcdx} + abcd$$

$$\therefore (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$$

Consequência 01:

Para $x = 1$, temos:

$$a) \quad (1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c) = 1^3 + (a+b+c) \cdot 1^2 + (ab+ac+bc) \cdot 1 + abc$$

$$\therefore (1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c) = a + b + c + ab + ac + bc + abc + 1$$

$$b) \quad (1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) = 1^3 - (a+b+c) \cdot 1^2 + (ab+ac+bc) \cdot 1 - abc$$

$$\therefore (1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) = ab + ac + bc - a - b - c - abc + 1$$

$$c) \quad (1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) \cdot (1-d) = 1^4 - (a+b+c+d) \cdot 1^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) \cdot 1^2 - (abc+abd+acd+bcd) \cdot 1 + abcd$$

$$\therefore (1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) \cdot (1-d) = 1 - a - b - c - d + ab + ac + ad + bc + bd + cd - abc - abd - acd - bcd + abcd$$

Consequência 02 (Identidade de Gauss):

Para a, b e c , temos:

$$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) = (ab+ac+bc)(a+b+c) - abc$$

Demonstração:

$$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) = (a^2 + ac + ab + bc) \cdot (b+c)$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = a^2b + abc + ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + abc + bc^2$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = ab(a+c) + ac(a+c) + bc(a+c) + ab^2 + b^2c + abc - abc$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = (a+c)(ab+ac+bc) + b(ab+ac+bc) - abc$$

$$\therefore (a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) = (ab+ac+bc)(a+b+c) - abc.$$

Exemplo Resolvido 214: Efetue $(x+3) \cdot (x+6) \cdot (x+7)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x+3) \cdot (x+6) \cdot (x+7) = x^3 + (3+6+7)x^2 + (3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 6 \cdot 7)x + 3 \cdot 6 \cdot 7$$

$$\Rightarrow (x+3) \cdot (x+6) \cdot (x+7) = x^3 + 16x^2 + (18 + 21 + 42)x + 126$$

$$\Rightarrow (x+3) \cdot (x+6) \cdot (x+7) = x^3 + 16x^2 + 81x + 126.$$

Exemplo Resolvido 215: Efetue $(x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-11)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x-4)(x-5)(x-11) = x^3 - (4+5+11)x^2 + (4 \cdot 5 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 11)x - 4 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\Rightarrow (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-11) = x^3 - 20x^2 + (20 + 44 + 55)x - 220$$

$$\Rightarrow (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-11) = x^3 - 20x^2 + 119x - 220.$$

Exemplo Resolvido 216: Efetue $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = x^4 - (1+2+3+4)x^3 +$$

$$+ (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)x^2 -$$

$$- (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4)x + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = x^4 - 10x^3 + (2+3+4+6+8+12)x^2 -$$

$$- (6+8+12+24)x + 24$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24.$$

5.36) Identidade de Sophie-Germain:

A identidade de Sophie-Germain é um produto notável muito útil em olimpíadas internacionais, tem até aplicação em congruência modular. Ela se parece muito com o quadrado da soma e é dada por:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$$

Demonstração:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - (2ab)^2 \Leftrightarrow a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$$

$$\therefore a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

Consequências:a) Para $b = 1$:

$$a^4 + 4 \cdot 1^4 = (a^2 + 2 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1)(a^2 + 2 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1)$$

$$\therefore a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2).$$

b) Para $b = \frac{1}{2}$:

$$a^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left[a^2 + 2a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[a^2 - 2a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$a^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = \left[a^2 + a + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\right] \left[a^2 - a + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$\therefore a^4 + \frac{1}{4} = \left(a^2 + a + \frac{1}{2}\right) \left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right).$$

Exemplo Resolvido 217: Efetue $16p^4 + 324q^4$.**Resolução:** Podemos escrever:

$$16p^4 + 324q^4 = (2p)^4 + 4 \cdot (3q)^4 \Rightarrow$$

$$16p^4 + 324q^4 = [(2p)^2 + 2(3q)^2 + 2(2p)(3q)] \cdot [(2p)^2 + 2(3q)^2 - 2(2p)(3q)]$$

$$\Rightarrow 16p^4 + 324q^4 = (4p^2 + 18q^2 + 12pq)(4p^2 + 18q^2 - 12pq).$$

Exemplo Resolvido 218: Efetue $625m^4 + 4$.**Resolução:** Podemos escrever:

$$E = 625m^4 + 4 \Rightarrow E = (5m)^4 + 4$$

$$\Rightarrow E = [(5m)^2 + 2 \cdot (5m) + 2][(5m)^2 - 2 \cdot (5m) + 2]$$

$$\therefore 625m^4 + 4 = (25m^2 + 10m + 2)(25m^2 - 10m + 2).$$

Exemplo Resolvido 219: Prove que $16a^4 + \frac{1}{4} = \left(4a^2 + 2a + \frac{1}{2}\right)\left(4a^2 - 2a + \frac{1}{2}\right)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$16a^4 + \frac{1}{4} = (2a)^4 + \frac{1}{4} \Rightarrow 16a^4 + \frac{1}{4} = \left[(2a)^2 + (2a) + \frac{1}{2}\right]\left[(2a)^2 - (2a) + \frac{1}{2}\right]$$

$$\therefore 16a^4 + \frac{1}{4} = \left(4a^2 + 2a + \frac{1}{2}\right)\left(4a^2 - 2a + \frac{1}{2}\right).$$

5.37) Uma Identidade Interessante

Existe uma identidade muito parecida com a identidade de Sophie-Germain, podemos dizer que é um caso particular, o seu raciocínio é o mesmo, mas apenas um detalhe chama atenção. É dada por:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$$

Demonstração:

$$a^4 + b^4 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 \Rightarrow a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2$$

$$\therefore a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2).$$

Consequência:

Para $b = 1$, temos:

$$a^4 + 1 = (a^2 + a\sqrt{2} + 1)(a^2 - a\sqrt{2} + 1)$$

Demonstração:

$$a^4 + 1 = a^4 + 1 + 2a^2 - 2a^2 \Leftrightarrow a^4 + 1 = (a^2 + 1)^2 - (a\sqrt{2})^2$$

$$\therefore a^4 + 1 = (a^2 + a\sqrt{2} + 1)(a^2 - a\sqrt{2} + 1).$$

Exemplo Resolvido 220: Efetue $81x^4 + 1 = (9x^2 + 3x\sqrt{2} + 1)(9x^2 - 3x\sqrt{2} + 1)$.

Resolução: Podemos escrever:

$$81x^4 + 1 = (3x)^4 + 1 \Rightarrow 81x^4 + 1 = \left[(3x)^2 + (3x) \cdot \sqrt{2} + 1\right]\left[(3x)^2 - (3x) \cdot \sqrt{2} + 1\right]$$

$$\therefore 81x^4 + 1 = (9x^2 + 3x\sqrt{2} + 1)(9x^2 - 3x\sqrt{2} + 1).$$

5.38) Identidade de Chrystal:

Uma identidade diferente, que tem algumas aplicações em olimpíadas e é dada por:

$$\frac{(b-c)^2 + (b+c)^2 + 2(b^2 - c^2)}{b^4 - 2b^2c^2 + c^4} = \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{2}{(b^2 - c^2)} + \frac{1}{(b+c)^2}$$

Demonstração:

$$E = \frac{(b-c)^2 + (b+c)^2 + 2(b^2 - c^2)}{b^4 - 2b^2c^2 + c^4} \Rightarrow E = \frac{(b-c)^2 + (b+c)^2 + 2(b^2 - c^2)}{(b^2 - c^2)^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(b-c)^2}{(b^2 - c^2)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b^2 - c^2)^2} + \frac{2(b^2 - c^2)}{(b^2 - c^2)^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(b-c)^2}{[(b+c)(b-c)]^2} + \frac{(b+c)^2}{[(b+c)(b-c)]^2} + \frac{2}{(b^2 - c^2)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2(b-c)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2(b-c)^2} + \frac{2}{(b^2 - c^2)}$$

$$\therefore \frac{(b-c)^2 + (b+c)^2 + 2(b^2 - c^2)}{b^4 - 2b^2c^2 + c^4} = \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{2}{(b^2 - c^2)} + \frac{1}{(b+c)^2}$$

Exemplo Resolvido 221: Calcule $\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2 + 2(x^2 - 1^2)}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2 + 2(x^2 - 1^2)}{x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot 1^2 + 1^4} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x^2 - 1^2)} + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2 + 2(x^2 - 1^2)}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x^2 - 1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Exemplo Resolvido 222: Determine $\frac{(2x-3)^2 + (2x+3)^2 + 2(4x^2-9)}{16x^4 - 72x^2 + 81}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{(2x-3)^2 + (2x+3)^2 + 2((2x)^2 - 3^2)}{(2x)^4 - 2 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + 3^4} = \frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{2}{((2x)^2 - 3^2)} + \frac{1}{(2x+3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x-3)^2 + (2x+3)^2 + 2(4x^2-9)}{16x^4 - 72x^2 + 81} = \frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{2}{(4x^2-9)} + \frac{1}{(2x+3)^2}.$$

Problemas Propostos

Questão 5.77

Determine o valor das expressões abaixo:

- a) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$
- b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$
- c) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$
- d) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

Questão 5.78

Sejam a , b e c números reais distintos dois a dois. Prove que

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{a+c}{(b-a)(b-c)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

Questão 5.79

Sejam a , b e c números reais distintos dois a dois. Prove que

$$\frac{a^2+b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{a+b^2+c}{(b-a)(b-c)} + \frac{a+b+c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Questão 5.80

Determine o valor das expressões abaixo:

$$a) \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$b) \frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$c) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$d) \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

Questão 5.81

Sejam a , b e c números reais, tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, com os

denominadores diferentes de zero. Prove que $\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} = \frac{1}{(a+b+c)^5}$.

Questão 5.82 (Finlândia 2002)

Mostre que se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, então $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}$, desde que n seja um inteiro positivo ímpar.

Questão 5.83

Simplifique $\frac{2}{2a-b} + \frac{4b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{2a+b}$.

Questão 5.84

Simplifique $\frac{a+b}{(a-b)^2} - \frac{2a}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{(a+b)^2}$.

Questão 5.85 (CN-1961)

Efetue e simplifique $\left[\frac{2x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{y^2}{y^2-x^2} \right] \div \left[\frac{1}{x+y} + \frac{x}{x^2-y^2} \right]$.

Questão 5.86 (CN-1978)

Simplificando $\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)} - \frac{2ab}{a^2-b^2}$, para $b \neq \pm a$,

obtemos:

a) 11

b) $\frac{a+b}{a-b}$

c) $\frac{b}{a}$

d) $\frac{a-b}{a+b}$

e) $\frac{a}{b}$

Questão 5.87

Mostre que $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} = \frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}$.

Questão 5.88

Mostre que o valor de $\frac{(n+1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n+1)^2} - \frac{(n-1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n-1)^2} = 0$.

Questão 5.89 (Grã-Bretânia-2014)

Determine o valor de $\frac{2014^4 + 4 \cdot 2013^4}{2013^2 + 4027^2} - \frac{2012^4 + 4 \cdot 2013^4}{2013^2 + 4025^2}$.

Questão 5.90 (AIME-1987)

Seja $m = (10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)$ e

$n = (4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)$. Determine $\frac{m}{n}$.

Questão 5.91 (Moscou-Modificada)

Determine o valor de $\frac{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\left(8^4 + \frac{1}{4}\right)\left(10^4 + \frac{1}{4}\right)\left(12^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\left(7^4 + \frac{1}{4}\right)\left(9^4 + \frac{1}{4}\right)\left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}$.

Agora chegou o momento das identidades condicionais, identidades importantíssimas e muito frequentes em olimpíadas. Veremos as identidades mais importantes nas competições, elas aparecem como exercícios para prová-las, então preste bastante atenção nas demonstrações!

5.39) Identidades Condicionais:

Se $a + b + c = 0$, então temos:

a) Soma de Quadrados:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$$

Demonstração:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow (0)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$$

b) Quadrado da Soma Dois a Dois:

$$(ab + ac + bc)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$$

Demonstração:

$$(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc \cdot (a + b + c)$$

$$(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc \cdot (0)$$

$$\therefore (ab + ac + bc)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$$

c) Soma de Cubos Simples:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Demonstração:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$$

$$\Rightarrow (0)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(0)(ab + ac + bc) - 3abc$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

d) Soma de Três Cubos da Diferença:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

Demonstração:

$$a-b+b-c+c-a=0; x^3+y^3+z^3=3xyz$$

$$\Rightarrow x=a-b; y=b-c; z=c-a$$

$$\therefore (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

e) Cubo da Soma Dois a Dois:

$$(ab+bc+ac)^3 = (ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 + 3(ab+bc)(ab+ac)(bc+ac)$$

Demonstração:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$\therefore (ab+bc+ac)^3 = (ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 + 3(ab+bc)(ab+ac)(bc+ac)$$

f) Cubo da Soma Dois a Dois em Função do Produto dos Três:

$$(ab+bc+ac)^3 = (ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 - 3a^2b^2c^2$$

Demonstração:

$$(ab+bc+ac)^3 = (ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 + 3(ab+bc)(ab+ac)(bc+ac)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ac)^3 = (ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 + 3abc(a+c)(b+c)(b+a)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ac)^3 = (ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 + 3abc(-b)(-a)(-c)$$

$$\therefore (ab+bc+ac)^3 = (ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 - 3a^2b^2c^2.$$

g) Soma das Quartas Potências: (Stanford-2013)

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab+ac+bc)^2$$

Demonstração:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a+b+c)^2(ab+ac+bc) - 2(ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)$$

$$(0)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4 \cdot (0)^2 \cdot (ab + ac + bc) - 2(ab + ac + bc)^2 - 2abc \cdot (0)$$

$$\Rightarrow 0 = a^4 + b^4 + c^4 - 2(ab + ac + bc)^2$$

$$\therefore \boxed{a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + ac + bc)^2}.$$

h) Quadrado da Soma de Três Quadrados:

$$\boxed{(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)}$$

Demonstração:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2[(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2]$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2[(ab + bc + ac)^2 - 2abc(a + b + c)]$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + \underbrace{2(ab + bc + ac)^2}_{a^4 + b^4 + c^4} - 4abc(a + b + c)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + a^4 + b^4 + c^4 - 4abc(0)$$

$$\therefore \boxed{(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)}.$$

i) Soma das Quintas Potências:

$$\boxed{a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc)}$$

Demonstração:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) = -2(ab + bc + ac) \cdot 3abc$$

$$\begin{aligned} a^5 + a^2b^3 + a^2c^3 + a^3b^2 + b^5 + b^2c^3 + a^3c^2 + b^3c^2 + c^5 = \\ = -6a^2b^2c - 6a^2bc^2 - 6ab^2c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 = -5a^2b^2c - 5a^2bc^2 - 5ab^2c^2 - \\ - (a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 + a^2b^3 + a^2c^3 + a^3b^2 + b^2c^3 + a^3c^2 + b^3c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc) - \\ - [a^2b^2(c + b + a) + a^2c^2(b + c + a) + b^2c^2(a + c + b)] \end{aligned}$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc) - (a + b + c) \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc) - (0) \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

$$\therefore \boxed{a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc)}.$$

Concluimos que:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} = -(ab + bc + ac) \cdot abc = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$$

$$\therefore \boxed{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}}.$$

j) Soma das Sétimas Potências:

$$\boxed{a^7 + b^7 + c^7 = 7abc[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2]}$$

Demonstração:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5) = [-2(ab + bc + ac)][-5abc(ab + ac + bc)]$$

$$\begin{aligned} a^7 + a^5b^2 + a^5c^2 + a^2b^5 + b^7 + b^2c^5 + a^2c^5 + b^2c^5 + c^7 &= \\ &= 10abc(ab + ac + bc)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^7 + b^7 + c^7 &= 10abc(ab + ac + bc)^2 - \\ &\quad - (a^5b^2 + a^5c^2 + a^2b^5 + b^2c^5 + a^2c^5 + b^2c^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^7 + b^7 + c^7 &= 10abc[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2] - \\ &\quad - [(ab)^2(a^3 + b^3) + (ac)^2(a^3 + c^3) + (bc)^2(b^3 + c^3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^7 + b^7 + c^7 &= (ab)^2[10abc - (a^3 + b^3)] + (ac)^2[10abc - (a^3 + c^3)] + \\ &\quad + (bc)^2[10abc - (b^3 + c^3)] \end{aligned}$$

$$a^7 + b^7 + c^7 = (ab)^2[7abc] + (ac)^2[7abc] + (bc)^2[7abc]$$

$$\therefore \boxed{a^7 + b^7 + c^7 = 7abc[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2]} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{a^7 + b^7 + c^7 = 7abc(ab + ac + bc)^2}.$$

Concluimos que:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{(a^5 + b^5 + c^5)}{5} = abc \cdot (ab + bc + ac)^2 = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}$$

$$\therefore \boxed{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{(a^5 + b^5 + c^5)}{5} = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}}$$

k) Produto de Potências Consecutivas:

$$\boxed{\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2}$$

Demonstração:

$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 (a^4 + b^4 + c^4) = (abc)^2 \cdot 2(ab + bc + ac)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \frac{(a^4 + b^4 + c^4)}{2} = [(abc)(ab + bc + ac)]^2$$

$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2}$$

Concluimos que:

$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) = [(abc)(ab + bc + ac)]^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2}$$

I) Cubo de Quatro Termos:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ab(c+d) + 3cd(a+b)$$

Demonstração:

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3ab(c+d) - 3cd(a+b) + 3(a+b+c+d) \cdot (ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$(0)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(0) \cdot (ab+ac+ad+bc+bd+cd) - 3ab(c+d) - 3cd(a+b)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3ab(c+d) - 3cd(a+b) = 0$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ab(c+d) + 3cd(a+b)$$

Outra maneira:

$$a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d) \Rightarrow (a+b)^3 = [-(c+d)]^3$$

$$\Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -[c^3 + 3c^2d + 2cd^2 + d^3]$$

$$\Rightarrow a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = -c^3 - 3cd(c+d) - d^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a+b) - 3cd(c+d)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab[-(c+d)] - 3cd[-(a+b)]$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ab(c+d) + 3cd(a+b)$$

Vejamos algumas aplicações interessantes!

Exemplo Resolvido 223: Calcule $\sqrt{16-6\sqrt{7}} + \sqrt{16+6\sqrt{7}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$x = \sqrt{16-6\sqrt{7}} + \sqrt{16+6\sqrt{7}} \Rightarrow x - \sqrt{16-6\sqrt{7}} - \sqrt{16+6\sqrt{7}} = 0$$

$$\Rightarrow x + \left(-\sqrt{16-6\sqrt{7}}\right) + \left(-\sqrt{16+6\sqrt{7}}\right) = 0, x > 0.$$

$$\Rightarrow \overset{a}{x} + \overset{b}{\left(-\sqrt{16-6\sqrt{7}}\right)} + \overset{c}{\left(-\sqrt{16+6\sqrt{7}}\right)} = 0 \Rightarrow a+b+c=0$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2[a(b+c) + bc] \\
 &\Rightarrow x^2 + 16 - 6\sqrt{7} + 16 + 6\sqrt{7} = \\
 &\quad = -2 \left[-x \left(\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} + \sqrt{16 + 6\sqrt{7}} \right) + \left(-\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} \right) \left(-\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} \right) \right] \\
 &\Rightarrow x^2 + 32 = -2 \left[-x^2 + \left(\sqrt{16^2 - (6\sqrt{7})^2} \right) \right] \\
 &\Rightarrow x^2 + 32 = -2 \left[-x^2 + \left(\sqrt{256 - 252} \right) \right] \Rightarrow x^2 + 32 = -2 \left[-x^2 + 2 \right] \\
 &\Rightarrow x^2 + 32 = 2x^2 - 4 \Rightarrow 4 + 32 = 2x^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \therefore x = 6.
 \end{aligned}$$

Exemplo Resolvido 222: Calcule $\sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}} + \sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}}$.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}} + \sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} \Rightarrow x - \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}} - \sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} = 0 \\
 &\Rightarrow x + \left(-\sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}} \right) + \left(-\sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} \right) = 0, x \in \mathbb{R}. \\
 &\Rightarrow \overset{a}{x} + \left(\overset{b}{-\sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}}} \right) + \left(\overset{c}{-\sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}}} \right) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \\
 &\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\
 &\Rightarrow x^3 - 44 + 18\sqrt{6} - 44 - 18\sqrt{6} = 3 \cdot x \cdot \left(-\sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}} \right) \cdot \left(-\sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} \right) \\
 &\Rightarrow x^3 - 88 = 3 \cdot x \cdot \left(\sqrt[3]{44^2 - (18\sqrt{6})^2} \right) \\
 &\Rightarrow x^3 - 88 = 3 \cdot x \cdot \left(\sqrt[3]{1936 - 1944} \right) \Rightarrow x^3 - 88 = 3 \cdot x \cdot \left(\sqrt[3]{-8} \right) \\
 &\Rightarrow x^3 - 88 = 3 \cdot x \cdot (-2) \Rightarrow x^3 - 88 = -6x \Rightarrow x^3 + 6x - 88 = 0 \therefore x = 4.
 \end{aligned}$$

Observação: Encontramos $x = 4$ pelo teorema do fator. Teorema que será estudado em detalhes no capítulo de Fatoração.

Exemplo Resolvido 223: Se $a + b + c = 3$, determine o valor de

$$\frac{(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3}{15(a-1)(b-1)(c-1)}.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$a + b + c = 3 \Rightarrow (a-1) + (b-1) + (c-1) = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3 = 3(a-1)(b-1)(c-1)$$

$$\Rightarrow \frac{(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3}{(a-1)(b-1)(c-1)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} \cdot \frac{(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{1}{15} \cdot 3$$

$$\therefore \frac{(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3}{15(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{1}{5}.$$

Problemas Propostos

Questão 5.92 (IME-06/07)

Sejam a , b e c números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$,

determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

Questão 5.93

Seja a , b e c , números reais tais que $a + b + c = 5$ e $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} = 6$.

Determine o valor de $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.

Questão 5.94

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $\frac{2abc}{(a^2 + ac + bc + ab)(b+c)}$.

Questão 5.95

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $\frac{(a+b-2c)^2 + (a+c-2b)^2 + (b+c-2a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Questão 5.96 (Moscou 1949)

Prove que $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ para inteiros x, y, z , somente se $x = y = z = 0$.

Questão 5.97 (Irã-1985)

Sejam x, y e z três números reais positivos, tais que $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$.

Determine o valor de $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$.

Questão 5.98

Sejam a, b e c inteiros positivos, tais que $a = b + c$. Prove que $a^4 + b^4 + c^4$ é o dobro do quadrado de um inteiro positivo.

Questão 5.99

Se $a + b + c = 6$, determine o valor de $\frac{(a-2)^3 + (b-2)^3 + (c-2)^3}{7(a-2)(b-2)(c-2)}$.

Questão 5.100 (BMO-2007)

Determine o valor de $\frac{1^4 + 2007^4 + 2008^4}{1^2 + 2007^2 + 2008^2}$.

Questão 5.101 (Singapura-2014)

Determine o valor de $\frac{2014^3 - 2013^3 - 1}{2013 \cdot 2014}$.

Questão 5.102

Seja r um número real, tal que $\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 3$. Determine o valor de $r^3 + \frac{1}{r^3}$.

Questão 5.103 (AMC-2011)

Qual dos valores abaixo é igual a $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$?

- a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) 6

Questão 5.104 (Princeton-2006)

Simplifique $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Questão 5.105 (AHSME-1970)

O número $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é igual a:

- a) 2 b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $\sqrt{6}$ e) $2\sqrt{2}$

Questão 5.106 (CN-1984)

$\sqrt{3+2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} - \sqrt{3-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ é igual a:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Questão 5.107

Qual o valor de $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$?

Questão 5.108 (IMO-Longlist-1973)

O número $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ é racional ou irracional?

Questão 5.109 (AHSME-1980)

A soma $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$, é igual a:

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$ c) $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$
d) $\sqrt[3]{2}$ e) 1

Questão 5.110

Qual o valor de $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$?

Questão 5.111 (Suécia-2001)

Mostre que $(\sqrt{52} + 5)^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{52} - 5)^{\frac{1}{3}}$ é irracional.

Questão 5.112 (Malásia-2010)

Mostre que existem inteiros m e n , tais que $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}$.

Questão 5.113 (Turquia-2007-Modificada)

Determinando o valor de $x = \sqrt[3]{11 + \sqrt{337}} + \sqrt[3]{11 - \sqrt{337}}$, então $x^3 + 18x$ vale?

Questão 5.114 (Harvard/MIT-2008)

Sejam a , b , c são números reais não nulos, tais que $a + b + c = 0$, $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Determine $a^2 + b^2 + c^2$.

Questão 5.115

Simplifique $(a - 2b + c)^4 + (b - 2c + a)^4 + (c - 2a + b)^4$.

Questão 5.116

Se $a^2 + b^2 + c^2 = 5$, ache o valor de $\frac{(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2}{2(5+2bc)}$.

Questão 5.117

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{abc(ac + bc + ab)}$.

Questão 5.118

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $a^6 + b^6 + c^6$.

Questão 5.119

Sejam a , b e c números reais, tais que $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Prove que

$$\frac{a^6 + b^6 + c^6}{a^3 + b^3 + c^3} = abc.$$

Questão 5.120 (Croácia-2001)

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}$.

Questão 5.121

Se $a + b + c = 0$, determine $\frac{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 - (ab + bc + ac)^3}{6abc \cdot (a^3 + b^3 + c^3)}$.

Questão 5.122 (IME-00/99)

Considere quatro números inteiros a , b , c e d . Prove que o produto: $(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$ é divisível por 12.

Questão 5.123 (Peru 2009)

Mostre que, se $a + b + c + d = 0$, então

$$(ac - bd)(bc - ad)(cd - ab) = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d).$$

Questão 5.124

Se $a + b + c = 0$, mostre que $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) = 9$.

Questão 5.125 (Rússia)

Sejam a , b e c números reais distintos dois a dois. Mostre que

$$a^2 \cdot (c-b) + b^2 \cdot (a-c) + c^2 \cdot (b-a) \text{ é diferente de zero.}$$

Veremos agora tópicos avançados em produtos notáveis.

Observação: Essas identidades não serão demonstradas.

5.40) Tópicos Avançados.

Os tópicos avançados são identidades diferentes que serão úteis em algumas questões, são identidades rebuscadas que muitos não conhecem. São elas:

TA1. Uma Identidade Interessante:

As identidades a seguir são binômios que podem aparecer facilmente em questões de olimpíadas, bem como em escolas militares.

- a) $(a_1^2 - k \cdot b_1^2)(a_2^2 - k \cdot b_2^2) = (a_1 a_2 + k b_1 b_2)^2 - k(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$
- b) $(a_1^2 + k \cdot b_1^2)(a_2^2 + k \cdot b_2^2) = (a_1 a_2 + k b_1 b_2)^2 + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$
- c) $(a_1^2 + k \cdot b_1^2)(a_2^2 + k \cdot b_2^2) = (a_1 a_2 - k b_1 b_2)^2 + k(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$

TA2. Identidade de Euler:

A identidade de Euler para quatro termos é uma identidade interessante, revela a astúcia de um grande gênio. Essa identidade é dada por:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)^2 + \\ + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)^2 + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2)^2 + \\ + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)^2$$

TA3. Identidade de Binet-Cauchy (Generalização da Identidade de Lagrange):

Aqui temos a generalização da identidade de Lagrange.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i c_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i d_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i d_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i c_i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)(c_i d_j - c_j d_i)$$

TA4. Identidade de Lebesgue:

A identidade de Lebesgue é pouco conhecida, relaciona o quadrado da soma de quatro termos com o produto dois a dois. É dada por:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2$$

TA5. Identidade de Liouville:

Essa é uma interessante identidade, que relaciona a soma das quartas potências, permutadas em soma e diferença.

$$6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a+b)^4 + (a-b)^4 + (a+c)^4 + (a-c)^4 + (a+d)^4 + (a-d)^4 + (b+c)^4 + (b-c)^4 + (b+d)^4 + (b-d)^4 + (c+d)^4 + (c-d)^4$$

TA6. Identidade Trinomial:

Essa é a "identidade da equação do 2º grau", relaciona o produto de equações do 2º grau com seus coeficientes.

$$(x^2 + axy + by^2)(m^2 + amn + bn^2) = (xm - byn)^2 + a(xm - byn)(ym + xn + ayn) + b(ym + xn + ayn)^2$$

TA7. Identidade Cúbica:

Essa é uma interessante identidade com cubos.

$$(6a^2 - 4ab + 4b^2)^3 = (3a^2 + 5ab - 5b^2)^3 + (4a^3 - 4ab + 6b^2)^3 + (5a^2 - 5ab - 3b^2)^3$$

TA8. Identidade de Ferrari:

Essa é a identidade das quartas potências, uma belíssima identidade.

$$(a^2 + 2ac - 2bc - b^2)^4 + (b^2 - 2ab - 2ac - c^2)^4 + (c^2 + 2ab + 2bc - a^2)^4 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc)^4$$

TA9. Identidade da Potência de 7:

Uma identidade bastante interessante que relaciona as potências de sete com quadrado e produto da soma de binômios.

$$(a+b+c)^7 - (a^7 + b^7 + c^7) = 7(a+b)(a+c)(b+c) \left[(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2 + abc(a+b+c) \right]$$

Observação: A identidade da Potência de 7 será demonstrada no capítulo de polinômios simétricos!

Capítulo 06 - Fatoração

Introdução

Fatorar é colocar em produto de fatores primos. Por exemplo, fatorar 15 é colocá-lo como um produto de fatores primos, no caso o 3 e o 5. Vamos fazer isso com polinômios agora, divirta-se!

Veremos os critérios de fatoração, vamos lá!

6.1) Critérios de Fatoração

Veremos os critérios mais interessantes para se fatorar polinômios, aprenderemos essas técnicas maravilhosas que ajudam o leitor a encontrar raízes de polinômios rapidamente. Divirtam-se!

O primeiro critério que estudaremos será a fatoração por agrupamento ou "colocando em evidência". É um método que consiste em agrupar os termos semelhantes buscando colocar a expressão em forma de produto.

6.2) Agrupamento ou "Evidência":

Esse critério consiste em agrupar termos semelhantes até termos um produto.

Exemplo Resolvido 224: Fatore $ax + by + bx + ay$.

Resolução: Agrupando os termos semelhantes:

$$\underline{ax + by} + \underline{bx + ay} = x(a + b) + y(a + b) \therefore \boxed{ax + by + bx + ay = (a + b)(x + y)}.$$

Exemplo Resolvido 225: Fatore $2x + 4x^2 - 2x^4 - x^3$.

Resolução: Podemos fazer quantos agrupamentos forem necessários:

$$E = 2x + 4x^2 - 2x^4 - x^3 \Rightarrow E = 2x(1 + 2x) - x^3(1 + 2x) \Rightarrow E = (1 + 2x)(2x - x^3)$$

$$\therefore \boxed{2x + 4x^2 - 2x^4 - x^3 = x(1 + 2x)(2 - x^2)}.$$

Nosso segundo critério tem ligação com os produtos notáveis, são os chamados quocientes notáveis, são muitas as aplicações desse critério principalmente em simplificações.

6.3) Quocientes Notáveis:

Esse critério consiste em usar os produtos notáveis para fazer a fatoração. Usaremos os mais comuns:

$$a) \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b \text{ ou } \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b.$$

$$b) \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$$

$$c) \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$$

$$d) \frac{a^4 - b^4}{a - b} = (a + b)(a^2 + b^2) \text{ ou } \frac{a^4 - b^4}{a + b} = (a - b)(a^2 + b^2).$$

$$e) \frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4.$$

$$f) \frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$$

$$g) \frac{a^6 - b^6}{a - b} = (a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

$$h) \frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2} = a^4 - a^2b^2 + b^4.$$

$$i) \frac{a^7 - b^7}{a - b} = a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6.$$

$$j) \frac{a^7 + b^7}{a + b} = a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6.$$

$$k) \frac{a^8 - b^8}{a - b} = (a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

$$l) \frac{a^9 - b^9}{a - b} = (a^2 + ab + b^2)(a^6 + a^3b^3 + b^6).$$

$$m) \frac{a^9 + b^9}{a + b} = (a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6).$$

$$n) \frac{a^{10} - b^{10}}{a^2 - b^2} = (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

$$o) \frac{a^{10} + b^{10}}{a^2 + b^2} = a^8 - a^6b^2 + a^4b^4 - a^2b^6 + b^8.$$

Generalização:

Podemos generalizar a soma e a diferença das enésimas potências.

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}.$$

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + \dots - a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}.$$

Para n par, temos:

$$\frac{a^{m \cdot n} - b^{m \cdot n}}{a^m - b^m} = a^{m(n-1)} + a^{m(n-2)} \cdot b^m + \dots + a^m \cdot b^{m(n-2)} + b^{m(n-1)}.$$

Exemplo Resolvido 226: Fatore $\frac{x^4 - 81}{x - 3}$.**Resolução:** Note que podemos usar o quociente notável:

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = (a + b)(a^2 + b^2). \text{ Então temos:}$$

$$\frac{x^4 - 81}{x - 3} = \frac{x^4 - 3^4}{x - 3} \Rightarrow \frac{x^4 - 81}{x - 3} = (x + 3)(x^2 + 3^2)$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^4 - 81}{x - 3} = (x + 3)(x^2 + 9)}.$$

Exemplo Resolvido 227: Fatore $\frac{32x^5 - 1}{2x - 1}$.**Resolução:** Note que podemos usar o quociente notável:

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4. \text{ Então temos:}$$

$$E = \frac{32x^5 - 1}{2x - 1} \Rightarrow E = \frac{(2x)^5 - 1}{2x - 1} \Rightarrow E = (2x)^4 + (2x)^3 \cdot 1 + (2x)^2 \cdot 1^2 + (2x) \cdot 1^3 + 1^4$$

$$\Rightarrow E = 16x^4 + 8x^3 \cdot 1 + 4x^2 \cdot 1 + (2x) \cdot 1 + 1 \therefore \boxed{E = 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1}.$$

Exemplo Resolvido 228: Fatore $\frac{64x^6 + 729y^6}{4x^2 + 9y^2}$.

Resolução: Note que podemos usar o quociente notável:

$$\frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2} = a^4 - a^2b^2 + b^4. \text{ Então temos:}$$

$$E = \frac{64x^6 + 729y^6}{4x^2 + 9y^2} \Rightarrow E = \frac{(2x)^6 + (3y)^6}{(2x)^2 + (3y)^2} \Rightarrow E = (2x)^4 - (2x)^2 \cdot (3y)^2 + (3y)^4$$

$$\Rightarrow E = 16x^4 - 4x^2 \cdot 9y^2 + 81y^4 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{64x^6 + 729y^6}{4x^2 + 9y^2} = 16x^4 - 36x^2y^2 + 81y^4}.$$

O terceiro critério é "completando o produto notável", esse método consiste em chegar aos produtos notáveis conhecidos, é um método bem avançado e pouco usado devido à criatividade que o leitor deve ter para "enxergá-lo".

6.4) Completando o Produto Notável:

Esse critério consiste em adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir por termos que completem um produto notável conhecido, esse critério é pouco usado, devido à criatividade que o leitor deve ter para "enxergar" o produto notável. Então, vamos conhecê-lo.

Exemplo Resolvido 229: Fatore $x^2 - 4$.

Resolução: Note que podemos usar o produto notável:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b). \text{ Então temos:}$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 \quad \therefore \quad \boxed{x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)}.$$

Exemplo Resolvido 230: Fatore $8x^3 - 27$.

Resolução: Note que podemos usar o produto notável:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \text{ Então temos:}$$

$$E = 8x^3 - 27 \Rightarrow E = 2^3x^3 - 3^2 \Rightarrow E = (2x)^3 - 3^2$$

$$\Rightarrow E = (2x - 3)\left[(2x)^2 + (2x) \cdot 3 + 3^2\right] \Rightarrow E = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$$

$$\therefore \quad \boxed{8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)}.$$

Exemplo Resolvido 231: Fatore $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Resolução: Note que podemos usar o produto notável:

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Então temos:

$$E = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow E = x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 \quad \therefore \boxed{E = (x-1)^3}.$$

Exemplo Resolvido 232: Fatore $x^3 + 6x^2 - 16$.

Resolução: Note que podemos usar o produto notável:

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Então temos:

$$\begin{aligned} E = x^3 + 6x^2 - 16 &\Rightarrow E = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 8 - 24 \Rightarrow E = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 2^3 - 24 \\ &\Rightarrow E = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 2^3 - 24 + \boxed{12x} - \boxed{12x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E = \frac{x^3 + 3x^2 \cdot 2 + \boxed{2^3}}{3x \cdot 4} - \boxed{12x} - 24 \Rightarrow E = (x+2)^3 - 12(x+2)$$

$$\Rightarrow E = (x+2) \left[(x+2)^2 - 12 \right] \Rightarrow E = (x+2) \left[x^2 + 4x + 4 - 12 \right]$$

$$\therefore \boxed{x^3 + 6x^2 - 16 = (x+2)(x^2 + 4x - 8)}.$$

Exemplo Resolvido 233: Fatore $x^4 + 16$.

Resolução: Vamos resolver completando um trinômio quadrado perfeito, lembrando que poderíamos usar o critério 2.

Note que podemos usar os produtos notáveis: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Então temos:

$$x^4 + 16 = (x^2)^2 + 4^2 \Rightarrow x^4 + 16 = (x^2)^2 + 4^2 + \boxed{8x^2} - \boxed{8x^2}$$

$$\Rightarrow x^4 + 16 = \frac{(x^2)^2 + \boxed{2 \cdot x \cdot 4}}{8x^2} + 4^2 - \boxed{8x^2} \Rightarrow x^4 + 16 = (x^2 + 4)^2 - \boxed{8x^2} \Rightarrow$$

$$x^4 + 16 = (x^2 + 4)^2 - (2x\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^4 + 16 = (x^2 + 4 + 2x\sqrt{2})(x^2 + 4 - 2x\sqrt{2}).$$

Observação: Poderíamos usar a identidade de Sophie-Germain para $a = x$ e $b = \sqrt{2}$.

Problemas Propostos

Questão 6.1 (Harvard-MIT-2012)

Determine a soma de todos os fatores primos distintos de $25^3 - 27^2$.

Questão 6.2 (CN-1954)

Decomponha $16x^4 - 1$ em três fatores.

Questão 6.3 (AHSME-1954)

Os fatores de $x^4 + 64$ são:

a) $(x^2 + 8)^2$

b) $(x^2 + 8)(x^2 - 8)$

c) $(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 8x + 16)$

d) $(x^2 - 4x + 8)(x^2 - 4x - 8)$

$$e) (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$$

Questão 6.4

Fatore $5ax + 3by - 5ay - 3bx$.

Questão 6.5 (CN-1951)

Fatore $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$.

Questão 6.6 (CN-1952)

Fatore $8x^2 - 8xy - 3x + 3y$.

Questão 6.7

Fatore $16x^4y^6 - 81a^6b^4$.

Questão 6.8

Fattore $(2a - 3)^4 - (a - 5)^4$.

Questão 6.9

Se $a + b + c = 0$, qual o valor de $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$?

Questão 6.10

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $\frac{27a^2}{5bc} + \frac{27b^2}{5ac} + \frac{27c^2}{5ab}$.

Questão 6.11 (AHSME-1952)

A expressão $a^3 - a^{-3}$, é igual a:

a) $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

b) $\left(\frac{1}{a} - a\right)\left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

c) $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}\right)$

d) $\left(\frac{1}{a} - a\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

Questão 6.12 (AHSME-1955)

A fração $\frac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} - b^{-2}}$ é igual a:

a) $a^{-6} - b^{-6}$

b) $a^{-2} + b^{-2}$

c) $a^{-2} - b^{-2}$

d) $a^2 + b^2$

e) $a^2 - b^2$

Questão 6.13 (AHSME-1950)

Simplifique $\frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$.

Questão 6.14

Fatore $\frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca} + \frac{a-b}{ab}$.

Questão 6.15

Fatore $ax(b^2 + y^2) + by(a^2 + x^2)$.

Questão 6.16

Fatore $(a^2 - 3a + ab - 3b)^2 - (a + b)^2$.

Questão 6.17

Fatore $a^2c + 2abc + b^2c + a^2d + 2abd + b^2d$.

Questão 6.18

Fatore $a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc$.

Questão 6.19

Fatore $a^2 - 8ab - 2ac + 16b^2 + 8bc - 15c^2$.

Questão 6.20

Fatore $a^4 + 5bc^2 - a^2b - a^2c^2 - 2b^2 - 2c^4$.

Questão 6.21

Fatore $2a^4 + 17a^2b^2 + 21b^4 + 8a^2 + b^2 - 10$.

Questão 6.22

Simplifique $\frac{a^2 - bc - b^2 + ac}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}$.

Questão 6.23 (AHSME-1960)

Simplifique $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac}$.

Questão 6.24

Simplifique $\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3}$.

Questão 6.25

Simplifique $\frac{(a^5 + a^3b^2)(a^3 - b^3)(a^2 - b^2)}{(a^4 - b^4)(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3)}$.

Questão 6.26

Fatore $\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}$.

Questão 6.27

Fatore $\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2} - \frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2} - \frac{(a^4 - b^4)}{(a^2 + b^2)(a - b)}$.

Questão 6.28

Simplifique $\left(\frac{a^3 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab} \right)$.

Questão 6.29

Simplifique $\frac{(a-b)^4 - ab(a-b)^2 - 2a^2b^2}{(a-b)(a^3 - b^3) + 2a^2b^2}$.

Questão 6.30

Sejam a , b e c números reais não nulos, tais que $a + b + c = 0$. Prove que

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} = \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Questão 6.31

Se $a \neq b \neq c$, simplifique

$$M = \frac{\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-a}}{\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}}}.$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Questão 6.32

Fatore $4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$.

Questão 6.33

Fatore $2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$.

Questão 6.34 (AIME-1986)

Calcule $(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7})(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})$.

Questão 6.35 (Putnam-1938-Modificada)

Fatore $(y^2 - 3y + 2)^2 - 3(y^2 - 3y + 2) + 2 - y$.

Questão 6.36 (CN-1998)

A expressão $\frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2 - (x^3 - y^3 - z^3)^2}{y^3 + z^3}$ é equivalente a:

- a) $4x^3$ b) $4yx^3$ c) $4zx^3$ d) $4yzx^3$ e) $4xyz$

Questão 6.37 (CN - 1981-Modificada)

Fatore e simplifique a expressão $\frac{x(x^4 - 5x^2 + 4) - 2(x^4 - 5x^2 + 4)}{(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(x^2 - 1)}$.

- a) $\frac{x+2}{x-2}$ b) $\frac{x-2}{x-1}$ c) $\frac{x+1}{x-2}$ d) $\frac{x-2}{x+2}$ e) 1

Questão 6.38 (CN-1983)

Fatorando e simplificando a expressão $\frac{(zx^2 + zy^2 + 2xyz)(x^2 - y^2)}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$, tem-se:

- a) $z(x+y)$ b) $z(x-y)$ c) $zx+y$
d) $zx-y$ e) $y+z$

Questão 6.39 (Harvard-MIT-2012)

Sejam a e b números complexos, tais que $2a+3b=10$ e $4a^2+9b^2=20$, determine o valor de ab .

Questão 6.40 (Harvard-MIT-2014)

Sejam a , b , c e x , números reais com $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ que satisfaz

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{b^2}{a+c} + 20, \quad \frac{b^2}{b+c} = \frac{c^2}{b+a} + 14 \quad \text{e} \quad \frac{c^2}{c+a} = \frac{a^2}{c+b} + x, \quad \text{qual o valor de } x?$$

Questão 6.41 (Kürschár-1959)

Se a , b e c são três números inteiros distintos e n é um inteiro positivo, mostre

que $\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$, é um número inteiro.

Questão 6.42

Determine o valor das expressões abaixo:

$$a) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$b) \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$c) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$d) \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

Questão 6.43 (Stanford-2013)

Sejam $a = -\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}$, $c = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$. Determine

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}.$$

Questão 6.44

$$\text{Fatore } \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} - \frac{2}{a-b} - \frac{2}{b-c} - \frac{2}{c-a}.$$

Questão 6.45

$$\text{Fatore } \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Questão 6.46

$$\text{Fatore } \frac{a+1}{(a-b)(a-c)} + \frac{b+1}{(b-c)(b-a)} + \frac{c+1}{(c-a)(c-b)}.$$

Questão 6.47

$$\text{Fatore } \frac{a^2bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ab^2c}{(b-c)(b-a)} + \frac{abc^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Questão 6.48

Determine o valor das expressões abaixo:

$$a) \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$b) \frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$c) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$d) \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

Questão 6.49

Sabendo que $a + b + c + d = 10$, determine o valor de

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

Questão 6.50

Fatore $\frac{a^5 - 2a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 - 2ab^4 + b^5}{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}$.

Questão 6.51

Sejam a , b e c números inteiros, tais que $ab+bc+ca=1$. Prove que $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ é um quadrado perfeito.

Questão 6.52

Sejam a , b e c números reais, tais que $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Prove que

$$\frac{a^6+b^6+c^6}{a^3+b^3+c^3} = abc.$$

Questão 6.53

Fatore $(ab+bc+ca)^3 - abc(a+b+c)^3$.

Questão 6.54

Se $a+b+c=0$, determine o valor de

$$\frac{a^2}{(a+b-c)(a-b+c)} + \frac{b^2}{(c+b-a)(a+b-c)} + \frac{c^2}{(c+b-a)(a-b+c)}.$$

Questão 6.55

Se $a+b+c=0$, determine o valor de

$$\frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}.$$

Questão 6.56

Se $a+b+c=0$, Mostre que

$$2(ab+bc+ca)^4 = a^4(b-c)^4 + b^4(c-a)^4 + c^4(a-b)^4.$$

Questão 6.57

Sejam a e b dois números reais, tais que $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = 1$. Mostre que

$$\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} = a-b.$$

Questão 6.58

Sejam a , b e c números reais não nulos tais que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Prove que:

- a) $\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = 1$.
- b) $\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} = 1$.

No quarto critério, veremos a chamada "cruzadinha simples", uma ferramenta fortíssima da fatoração que tem inúmeras aplicações nos polinômios e simplificações, dentre outras. Vamos conhecê-lo.

6.5) Cruzadinha Simples

Esse quarto critério, denominado "cruzadinha simples", é uma ferramenta fortíssima que usa soma e produto para encontrar os binômios que serão os fatores. Não se esqueça das regras de sinais:

$$"(+) \cdot (+) = +; (-) \cdot (-) = +; (+) \cdot (-) = -".$$

A forma geral, para que tenhamos uma "cruzadinha simples", é:

1 variável simples: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

1 variável generalizada: $f(x) = Ax^{2m} + Bx^m + C$.

2 variáveis simples: $f(x) = Ax^2 + Bx \cdot y + Cy^2$.

2 variáveis generalizada: $f(x) = Ax^{2m} + Bx^m \cdot y^n + Cy^{2n}$.

Para fatorar esse polinômio, vamos realizar 3 passos, a saber:

Passo 01: Decompõem-se as duas extremidades em monômios, cujos coeficientes são os divisores naturais dos coeficientes extremos.

Passo 02: Multiplicam-se em cruz os monômios decompostos de modo que o resultado seja o termo central.

Passo 03: Cada linha forma um fator.

Observação: Sempre colocar o polinômio a ser fatorado em ordem decrescente de expoente.

Veja o esquema abaixo:

1 Variável Simples:

$$\begin{array}{rcccl} & & Ax^2 & + & Bx & + & C \\ a_1 \cdot x & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & c_1 \\ a_2 \cdot x & \searrow & & \searrow & & \searrow & c_2 \end{array}$$

A operação $(a_1 \cdot x) \cdot (c_2) + (a_2 \cdot x) \cdot (c_1)$ deve resultar no termo central.

1 Variável Generalizada:

$$\begin{array}{rcccl} & & Ax^{2m} & + & Bx^m & + & C \\ a_1 \cdot x^m & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & c_1 \\ a_2 \cdot x^m & \searrow & & \searrow & & \searrow & c_2 \end{array}$$

A operação $(a_1 \cdot x^m) \cdot c_2 + (a_2 \cdot x^m) \cdot c_1$ deve resultar no termo central.

2 Variáveis Simples:

$$\begin{array}{rcccl} & & Ax^2 & + & Bxy & + & Cy^2 \\ a_1 \cdot x & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & c_1 \cdot y \\ a_2 \cdot x & \searrow & & \searrow & & \searrow & c_2 \cdot y \end{array}$$

A operação $(a_1 \cdot x) \cdot (c_2 \cdot y) + (a_2 \cdot x) \cdot (c_1 \cdot y)$ deve resultar no termo central.

2 Variáveis Generalizada:

$$\begin{array}{rcccl} & & Ax^{2m} & + & Bx^m \cdot y^n & + & Cy^{2n} \\ a_1 \cdot x^m & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & c_1 \cdot y^n \\ a_2 \cdot x^m & \searrow & & \searrow & & \searrow & c_2 \cdot y^n \end{array}$$

A operação $(a_1 \cdot x^m) \cdot (c_2 \cdot y^n) + (a_2 \cdot x^m) \cdot (c_1 \cdot y^n)$ deve resultar no termo central.

Exemplo Resolvido 234: Fatore $6x^2 + 7x + 2$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Note que os divisores naturais de 2 são 1 e 2, então eles serão os extremos da direita, colocaremos os divisores positivos, caso não dê o termo central, colocaremos o negativo. Para os extremos da esquerda temos as combinações (1 e 6); (2 e 3); (3 e 2); (6 e 1).

Passo 02: Vamos efetuar os produtos e somar os resultados:

$$6x^2 + 7x + 2$$

$$\begin{array}{cc} x & \nearrow 1 \\ 6x & \searrow 2 \end{array}$$

$$x \cdot 2 = 2x \text{ e } 6x \cdot 1 = 6x$$

$$s = 2x + 6x = 8x$$

$$6x^2 + 7x + 2$$

$$\begin{array}{cc} 2x & \nearrow 1 \\ 3x & \searrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha "2 e 1"} \\ \leftarrow \text{linha "3 e 2"} \end{array}$$

$$2x \cdot 2 = 4x \text{ e } 3x \cdot 1 = 3x$$

$$s = 4x + 3x = 7x$$

$$6x^2 + 7x + 2$$

$$\begin{array}{cc} 3x & \nearrow 1 \\ 2x & \searrow 2 \end{array}$$

$$3x \cdot 2 = 6x \text{ e } 2x \cdot 1 = 2x$$

$$s = 6x + 2x = 8x$$

$$6x^2 + 7x + 2$$

$$\begin{array}{cc} 6x & \nearrow 1 \\ x & \searrow 2 \end{array}$$

$$6x \cdot 2 = 12x \text{ e } x \cdot 1 = x$$

$$s = 12x + x = 13x$$

Note que a segunda combinação dá o termo central, assim, temos:

Passo 03: linha "2 e 1" e "3 e 2", ou seja, $6x^2 + 7x + 2 = (2x + 1)(3x + 2)$.

Observação: Note que não foi necessário usar os divisores negativos.

Exemplo Resolvido 235: Fatore $x^2 + x - 2$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Note que os divisores naturais de 2 são 1 e 2, então eles serão os extremos da direita. Para os extremos da esquerda temos somente a combinação (1 e 1).

Passos 02: Vamos efetuar o produto, notando que ele é negativo, e somar os resultados:

$$x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{cc} x & \nearrow -1 \\ x & \searrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha "1 e -1"} \\ \leftarrow \text{linha "1 e 2"} \end{array}$$

$$x \cdot 2 = 2x \text{ e } x \cdot (-1) = -x$$

$$s = 2x - x = x$$

Note que essa combinação dá o termo central, logo temos:

Passo 03: linha "1 e -1" e "1 e 2", ou seja, $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

Exemplo Resolvido 236: Fatore $x^{2n} - 5x^n + 6$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Note que os divisores naturais de 6 são 1, 2, 3 e 6, então temos as combinações da direita (1 e 6); (2 e 3); (3 e 2); (6 e 1). Para a esquerda só temos (1 e 1).

Passo 02: Vamos efetuar o produto, notando que ele é positivo, e somar os resultados, veja que é conveniente usar os termos negativos devido ao fato de o termo central ser negativo:

$$\begin{array}{c}
 x^{2n} - 5x^n + 6 \\
 \begin{array}{ccc}
 x^n & \nearrow & -2 \\
 x^n & \searrow & -3
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{linha "1 e -2"} \\
 \leftarrow \text{linha "1 e -3"}
 \end{array}$$

Note que a combinação que dá o termo central é o -2 e o -3 .

Passo 03: Os fatores são os da linha "1 e - 2" e "1 e - 3", ou seja,

$$x^{2n} - 5x^n + 6 = (x^n - 2)(x^n - 3).$$

Exemplo Resolvido 237: Fatore $x^{6x} + 12x^{3x} + 11$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Note que os divisores naturais de 11 são 1 e 11, então temos uma combinação da direita (1 e 11). Para a esquerda só temos (1 e 1).

Passo 02: Vamos efetuar o produto, notando que ele é positivo, e somar os resultados, veja que é conveniente usar os termos positivos devido ao fato de o termo central ser positivo:

$$\begin{array}{c}
 x^{6x} + 12x^{3x} + 11 \\
 \begin{array}{ccc}
 x^{3x} & \nearrow & 1 \\
 x^{3x} & \searrow & 11
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{linha "1 e 1"} \\
 \leftarrow \text{linha "1 e 11"}
 \end{array}$$

Passo 03: Assim, as linhas "1 e 1" e "1 e 11" formam os fatores, ou seja,

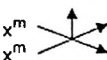
$$x^{6x} + 12x^{3x} + 11 = (x^{3x} + 1)(x^{3x} + 11).$$

Exemplo Resolvido 238: Fatore $x^{2m} - 2x^m y^n - 15y^{2n}$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Note que os divisores de 15 são 1, 3, 5 e 15, então temos as combinações da direita (1 e 15); (3 e 5); (5 e 3); (15 e 1). Para a esquerda só temos (1 e 1).

Passos 02: Vamos efetuar o produto, notando que ele é negativo, e somar os resultados:

$$x^{2m} - 2x^m y^n - 15y^{2n}$$


$-5y^n \Leftarrow$ linha "1 e -5"
 $3y^n \Leftarrow$ linha "1 e 3"

Passo 03: Logo, as linhas "1 e -5" e "1 e 3" formam os fatores, ou seja,

$$x^{2m} - 2x^m y^n - 15y^{2n} = (x^m - 5y^n)(x^m + 3y^n).$$

No quinto critério veremos como fatorar polinômios do 3º grau. Usaremos o teorema do fator ou das raízes racionais e a cruzadilha simples.

6.6) Teorema do Fator ou das Raízes Racionais

Seja $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ um polinômio de grau n . Então temos:

a) Se $x - a$ é fator de $P(x)$, então $P(a) = 0$. (Ida).

Demonstração (opcional):

Note que, se $x - a$ é fator, então podemos escrever:

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) \Rightarrow P(a) = \overbrace{(a - a)}^0 \cdot q(a) \Rightarrow P(a) = 0.$$

Observação: Para mais detalhes, consulte um livro sobre divisão de polinômios.

b) Se $P(a) = 0$, então $x - a$ é fator de $P(x)$. (Volta).

Demonstração (opcional):

Pelo algoritmo da divisão (*), temos:

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow P(a) = \overbrace{(a - a)}^0 \cdot q(a) + \overbrace{r(a)}^0 \therefore r(a) = 0.$$

Assim, se o resto é ZERO, então $P(x)$ é divisível por $q(x)$ e portanto $x - a$ é fator de $P(x)$, ou seja, $P(x) = (x - a) \cdot q(x)$.

(*) Observação: Para mais detalhes, consulte um livro sobre divisão de polinômios.

Teorema das Raízes Racionais

Considere ainda $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$.

O Teorema das Raízes Racionais garante que, se essa equação admite o número racional $\frac{p}{q}$ como raiz (com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então a_0 é divisível por p e a_n é divisível por q).

Se chamarmos $\frac{p}{q}$ de a , então temos: $a = \frac{\text{qualquer divisor de } a_0}{\text{qualquer divisor de } a_n}$. Note que esse "a" é o mesmo do $x - a$ acima.

Observações:

- 1) O teorema das raízes racionais não garante que o polinômio tenha raízes racionais, mas caso existam, o teorema permite identificar todas as raízes da equação;
- 2) Se $a_n = 1$ e os outros coeficientes são todos inteiros, o polinômio possui apenas raízes inteiras.
- 3) Se $q = 1$ e o polinômio admite raízes racionais, estas são inteiras e divisoras de a_0 .

6.7) Fatorando Polinômios do 3º grau

Vamos fatorar polinômios do 3º grau, usando o teorema do fator e a cruzadinha simples de uma variável.

Seguiremos os seguintes passos:

Passo 01: Usar o teorema do fator ou das raízes racionais.

Passo 02: Como $x - a$ é um fator e o polinômio é do 3º grau, então o outro fator é do 2º grau. Para encontrá-lo podemos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para divisão de polinômios ou usar o artifício abaixo.

Artifício: Utilizamos a identidade de polinômios para obter o outro fator, veja os exemplos para ficar mais claro.

Observação: Como o dispositivo de Briot-Ruffini é usado para divisão de polinômios e esse assunto foge aos objetivos desse livro, então iremos usar o artifício em todas as fatorações de polinômios de 3º grau por esse critério.

Passo 03: Usamos a cruzadinha simples.

Exemplo Resolvido 239: Fatore $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Usando o teorema das raízes racionais, temos que $a = \frac{\pm 1, \pm 2}{\pm 1, \pm 3}$.

Portanto, podemos ter como raízes: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}$ e $\pm \frac{2}{3}$. Assim, por inspeção, temos que -1 é raiz, logo podemos escrever:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 &= [x - (-1)](ax^2 + bx + c) \\ \Rightarrow 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 &= (x + 1)(ax^2 + bx + c) \\ \Rightarrow 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\ \Rightarrow 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 &= ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c. \end{aligned}$$

Passo 02: Por identidade de polinômios, encontramos facilmente os valores de a , b e c :

$$\begin{aligned} 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 &= ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c \\ \boxed{a=3}, a+b=-2 &\Rightarrow 3+b=-2 \Rightarrow \boxed{b=-5}, \boxed{c=-2}. \end{aligned}$$

Logo, temos: $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = (x+1)(3x^2 - 5x - 2)$.

Passo 03: Usando a cruzadinha simples, para fatorar o termo do segundo grau, temos: $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = (x+1)(x-2)(3x+1)$.

Exemplo Resolvido 240: Fatore $2x^3 + 3x^2 - 4x - 6$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Usando o teorema das raízes racionais, temos que

$$a = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6}{\pm 1, \pm 2}.$$

Portanto, podemos ter como raízes: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}$ e $\pm \frac{3}{2}$.

Assim, por inspeção, temos que $-\frac{3}{2}$ é raiz, logo podemos escrever:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = \left[x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right] (ax^2 + bx + c)$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = \left(x + \frac{3}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3a}{2}x^2 + \frac{3b}{2}x + \frac{3c}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = ax^3 + \left(\frac{3a}{2} + b\right)x^2 + \left(\frac{3b}{2} + c\right)x + \frac{3c}{2}$$

Passo 02: Por identidade de polinômios, encontramos facilmente os valores de a , b e c :

$$2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = ax^3 + \left(\frac{3a}{2} + b\right)x^2 + \left(\frac{3b}{2} + c\right)x + \frac{3c}{2}$$

$$\boxed{a=2}, \quad \frac{3a}{2} + b = 3 \Rightarrow 3 + b = 3 \Rightarrow \boxed{b=0}, \quad \frac{3b}{2} + c = -4 \Rightarrow \boxed{c=-4}$$

Logo, temos:

$$E = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 \Rightarrow E = \left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 4)$$

$$\Rightarrow E = \left(x + \frac{3}{2}\right)2 \cdot (x^2 - 2) \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = (2x + 3)(x^2 - 2)$$

Passo 03: Usamos a cruzadinha simples, para fatorar o termo do segundo grau.

Exemplo Resolvido 241: Fatore $8x^{3m} + 22x^{2m} - 9x^m - 9$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Usando o teorema das raízes racionais, temos que

$$a = \frac{\pm 1, \pm 3, \pm 9}{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8}$$

Portanto, podemos ter como raízes:

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8} \text{ e } \pm \frac{9}{8}$$

Assim, por inspeção, temos que 3 é raiz, logo podemos escrever:

$$8x^{3m} + 22x^{2m} - 9x^m - 9 = (x^m + 3)(ax^{2m} + bx^m + c) \Rightarrow$$

$$8x^{3m} + 22x^{2m} - 9x^m - 9 = ax^{3m} + bx^{2m} + cx^m + 3ax^{2m} + 3bx^m + 3c$$

$$\Rightarrow 8x^{3m} + 22x^{2m} - 9x^m - 9 = ax^{3m} + (3a + b)x^{2m} + (3b + c)x^m + 3c$$

Passo 02: Por identidade de polinômios, encontramos facilmente os valores de a , b e c :

$$8x^{3m} + 22x^{2m} - 9x^m - 9 = ax^{3m} + (3a+b)x^{2m} + (3b+c)x^m + 3c$$

$$\boxed{a=8}, 3a+b=22 \Rightarrow 24+b=22 \Rightarrow \boxed{b=-2}, 3c=-9 \Rightarrow \boxed{c=-3}.$$

$$\text{Logo, temos: } 8x^{3m} + 22x^{2m} - 9x^m - 9 = (x^m - 3)(8x^{2m} - 2x^m - 3).$$

Passo 03: Usando a cruzadinha simples, para fatorar o termo do segundo grau, temos.

$$8x^{3m} + 22x^{2m} - 9x^m - 9 = (x^m - 3)(2x^{2m} + 1)(4x^m - 3).$$

No sexto critério, veremos a chamada "cruzadinha dupla", é como se fosse uma generalização da cruzadinha simples, é muito eficaz para fatorar expressões com duas variáveis.

6.8) Cruzadinha Dupla

Esse quinto critério, denominado "cruzadinha dupla", é uma ferramenta fortíssima que usa soma e produto para encontrar os trinômios que serão os fatores. Não se esqueça das regras de sinais:

$$“(+) \cdot (+) = +; (-) \cdot (-) = +; (+) \cdot (-) = -”.$$

A forma geral, para que tenhamos uma "cruzadinha dupla", é:

$$2 \text{ variáveis simples: } f(x) = Ax^2 + Bx \cdot y + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

$$2 \text{ variáveis generalizada: } f(x) = Ax^{2m} + Bx^m \cdot y^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F$$

Para fatorá-la, vamos realizar 4 passos, a saber:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $Ax^2 + Bxy + Cy^2$.

Passo 02: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $Cy^2 + Ey + F$.

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples para os extremos, para a verificação do termo Dx , não utilizado.

Passo 04: Cada linha forma um fator.

Observação: Sempre se deve colocar o polinômio a ser fatorado em ordem decrescente de expoente, e, se faltar algum termo, completar com zeros.

Veja o esquema abaixo:

2 Variáveis Simples

$$Ax^2 + \boxed{Bx \cdot y} + Cy^2 + Dx + \boxed{Ey} + F$$

$$a_1 \cdot x \quad c_1 \cdot y$$

$$a_2 \cdot x \quad c_2 \cdot y$$

$$f_1$$

$$f_2$$

$$Ax^2 + Bx \cdot y + Cy^2 + \boxed{Dx} + Ey + F$$

$$a_1 \cdot x$$

$$a_2 \cdot x$$

$$f_1$$

$$f_2$$

A operação $(a_1 \cdot x)(c_2 \cdot y) + (a_2 \cdot x)(c_1 \cdot y)$ deve resultar no termo xy .

As operação $(c_2 \cdot y) \cdot (f_1) + (c_1 \cdot y) \cdot (f_2)$ deve resultar no termo y .

As operação $(a_1 \cdot x) \cdot (f_2) + (a_2 \cdot x) \cdot (f_1)$ deve resultar no termo x .

2 Variáveis Generalizada

$$Ax^{2m} + \boxed{Bx^m \cdot y^n} + Cy^{2n} + Dx^m + \boxed{Ey^n} + F$$

$$a_1 \cdot x^m \quad c_1 \cdot y^n$$

$$a_2 \cdot x^m \quad c_2 \cdot y^n$$

$$f_1$$

$$f_2$$

$$Ax^{2m} + Bx^m \cdot y^n + Cy^{2n} + \boxed{Dx^m} + Ey^n + F$$

$$a_1 \cdot x^m$$

$$a_2 \cdot x^m$$

$$f_1$$

$$f_2$$

A operação $(a_1 \cdot x^m)(c_2 \cdot y^n) + (a_2 \cdot x^m)(c_1 \cdot y^n)$ deve resultar no termo $x^m \cdot y^n$.

A operação $(c_2 \cdot y^n) \cdot (f_1) + (c_1 \cdot y^n) \cdot (f_2)$ deve resultar no termo y^n .

A operação $(a_1 \cdot x^m) \cdot (f_2) + (a_2 \cdot x^m) \cdot (f_1)$ deve resultar no termo x^m .

Exemplo Resolvido 242: Fatore $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $x^2 - 4xy + 4y^2$.

$$x^2 - 4xy + 4y^2$$

Passo 02: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $4y^2 - 6y + 0$.

$$4y^2 - 6y + 0$$

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples para os extremos, para a verificação do termo $3x$, não utilizado.

$$x^2 + 3x + 0$$

Passo 04: Cada linha forma um fator:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y + 0$$

Ou seja, $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y = (x - 2y)(x - 2y + 3)$.

Exemplo Resolvido 243: Fatore $x^2 + xy - 12y^2 + 8x + 11y + 15$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $x^2 + xy - 12y^2$.

$$x^2 + xy - 12y^2$$

Passo 02: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $-12y^2 + 11y + 15$.

$$\begin{array}{c}
 -12y^2 + 11y + 15 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \uparrow & \\
 4y & \nearrow & 3 \\
 -3y & \searrow & 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples para os extremos para, a verificação do termo $8x$, não utilizado.

$$\begin{array}{c}
 x^2 + 8x + 15 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \uparrow & \\
 x & \nearrow & 3 \\
 x & \searrow & 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Passo 04: Cada linha forma um fator:

$$\begin{array}{c}
 x^2 + xy - 12y^2 + 8x + 11y + 15 \\
 \begin{array}{ccc}
 x & \nearrow & 4y \\
 x & \searrow & -3y
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & \uparrow & \\
 3 & \nearrow & 3 \\
 5 & \searrow & 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{linha} \\
 \leftarrow \text{linha}
 \end{array}
 \end{array}$$

Ou seja, $x^2 + xy - 12y^2 + 8x + 11y + 15 = (x + 4y + 3)(x - 3y + 5)$.

Exemplo Resolvido 244: Fatore $2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4 + 8x^2 + y^2 - 10$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples no trinômio $2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4$.

$$\begin{array}{c}
 2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \uparrow & \\
 2x^2 & \nearrow & 3y^2 \\
 x^2 & \searrow & 7y^2
 \end{array}
 \end{array}$$

Passo 02: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $21y^4 + y^2 - 10$.

$$\begin{array}{c}
 21y^4 + y^2 - 10 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \uparrow & \\
 3y^2 & \nearrow & -2 \\
 7y^2 & \searrow & 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples para os extremos, para a verificação do termo $8x^2$, não utilizado.

$$\begin{array}{ccc}
 2x^4 + 8x^2 - 10 & & \\
 2x^2 & \nearrow & -2 \\
 x^2 & \searrow & 5
 \end{array}$$

Passo 04: Cada linha forma um fator:

$$\begin{array}{ccc}
 2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4 + y^2 + 8x^2 - 10 & & \\
 2x^2 & \nearrow & 3y^2 \\
 x^2 & \searrow & 7y^2
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & \nearrow & -2 \\
 & \searrow & 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{linha} \\
 \leftarrow \text{linha}
 \end{array}$$

Ou seja,

$$2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4 + 8x^2 + y^2 - 10 = (2x^2 + 3y^2 - 2)(x^2 + 7y^2 + 5).$$

O próximo critério é a chamada "cruzadinha dupla especial", uma interessante ferramenta para fatorar polinômios do quarto grau.

6.9) Cruzadinha Dupla Especial:

Nesse critério, denominado "cruzadinha dupla especial", aprenderemos a fatorar polinômios de quarto grau e usaremos as fatorações anteriores também, mas com uma pequena diferença. Não se esqueça das regras de sinais:

$$(+)(+) = +; (-)(-) = +; (+)(-) = -.$$

A forma geral, para que tenhamos uma "cruzadinha dupla especial", é:

$$1 \text{ variável simples: } f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

$$1 \text{ variável generalizada: } f(x) = Ax^{4m} + Bx^{3m} + Cx^{2m} + Dx^m + E$$

Para fatorá-la, vamos realizar 4 passos, a saber:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

Passo 02: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado do passo 01.

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do passo 02, para a verificação dos termos ainda não utilizados.

Passo 04: Cada linha forma um fator.

Observação: Sempre colocar o polinômio a ser fatorado em ordem decrescente de expoente e, se faltar algum termo, completar com zeros.

Veja o esquema abaixo:

1 Variável Simples

$$\begin{array}{c}
 Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \\
 \begin{array}{ccc}
 a_1 \cdot x^2 & \nearrow & e_1 \\
 a_2 \cdot x^2 & \searrow & e_2
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 Rx^2 = Cx^2 - (a_1 \cdot x^2 \cdot e_2 + a_2 \cdot x^2 \cdot e_1) \\
 \downarrow \\
 Ax^4 + Bx^3 + Rx^2 + Dx + E \\
 \begin{array}{ccc}
 a_1 \cdot x^2 & \nearrow & r_1 \cdot x \\
 a_2 \cdot x^2 & \searrow & r_2 \cdot x
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc}
 & \nearrow & e_1 \\
 & \searrow & e_2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

A operação $(a_1 \cdot x^2) \cdot (e_2) + (a_2 \cdot x^2) \cdot (e_1)$ será parte do termo x^2 .

A operação $Rx^2 = Cx^2 - (a_1 \cdot x^2 \cdot e_2 + a_2 \cdot x^2 \cdot e_1)$ será o termo central de referência para a cruzadinha simples.

A operação $(a_1 \cdot x^2)(r_2 \cdot x) + (a_2 \cdot x^2)(r_1 \cdot x)$ deve resultar no termo x^3 .

A operação $(r_2 \cdot x) \cdot e_1 + (r_1 \cdot x) \cdot e_2$ deve resultar no termo x .

1 Variável Generalizada

$$\begin{array}{c}
 Ax^{4m} + Bx^{3m} + Cx^{2m} + Dx^m + E \\
 \begin{array}{ccc}
 a_1 \cdot x^{2m} & \nearrow & e_1 \\
 a_2 \cdot x^{2m} & \searrow & e_2
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 Rx^{2m} = Cx^{2m} - (a_1 \cdot x^{2m} \cdot e_2 + a_2 \cdot x^{2m} \cdot e_1) \\
 \downarrow \\
 Ax^{4m} + Bx^{3m} + Rx^{2m} + Dx^m + E \\
 \begin{array}{ccc}
 a_1 \cdot x^{2m} & \nearrow & r_1 \cdot x^m \\
 a_2 \cdot x^{2m} & \searrow & r_2 \cdot x^m
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc}
 & \nearrow & e_1 \\
 & \searrow & e_2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

A operação $(a_1 \cdot x^{2m}) \cdot (e_2) + (a_2 \cdot x^{2m}) \cdot (e_1)$ será parte do termo x^{2m} .

A operação $Rx^{2m} = Cx^{2m} - (a_1 \cdot x^{2m} \cdot e_2 + a_2 \cdot x^{2m} \cdot e_1)$ será o termo central de referência para a cruzadinha simples.

A operação $(a_1 \cdot x^{2m})(r_2 \cdot x^m) + (a_2 \cdot x^{2m})(r_1 \cdot x^m)$ deve resultar no termo x^{3m} .

A operação $(r_2 \cdot x^m) \cdot e_1 + (r_1 \cdot x^m) \cdot e_2$ deve resultar no termo x^m .

Exemplo Resolvido 245: Fatore $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 4$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

Passo 02: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado do passo 01.

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do passo 02, para a verificação dos termos ainda não utilizados.

$$\begin{array}{rcl}
 & x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 4 \\
 \begin{array}{l} x^2 \\ x^2 \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} -4 \\ 1 \end{array} \\
 & \downarrow & \\
 & Rx^2 = 5x^2 - \underbrace{(x^2 \cdot 1 + x^2 \cdot (-4))}_{-3x^2} \\
 \Rightarrow Rx^2 = 5x^2 + 3x^2 & \Rightarrow Rx^2 = 8x^2 & \\
 & \downarrow & \\
 & x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x - 4 & \\
 \begin{array}{l} x^2 \\ x^2 \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \quad \nearrow \\ \searrow \quad \searrow \end{array} & \begin{array}{l} -4x \quad -4 \\ -2x \quad 1 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha} \\ \leftarrow \text{linha} \end{array}
 \end{array}$$

Passo 04: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = (x^2 - 4x - 4)(x^2 - 2x + 1).$$

Exemplo Resolvido 246: (IME - Modificada) Fatore

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18.$$

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

Passo 02: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado do passo 01.

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do passo 02, para a verificação dos termos ainda não utilizados.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 \\
 \begin{array}{ccc}
 x^2 & \nearrow & -9 \\
 x^2 & \searrow & -2
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 Rx^2 = -11x^2 - \underbrace{(x^2 \cdot (-2) + x^2 \cdot (-9))}_{-11x^2} \\
 \Rightarrow Rx^2 = -11x^2 + 11x^2 \Rightarrow Rx^2 = 0x^2 \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 18x + 18 \\
 \begin{array}{ccc}
 x^2 & \nearrow & 0x \\
 x^2 & \searrow & -2x
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 & \nearrow & -9 \\
 & \searrow & -2
 \end{array}
 \end{array} \begin{array}{l} \Leftarrow \text{linha} \\ \Leftarrow \text{linha} \end{array}
 \end{array}$$

Passo 04: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = (x^2 - 9)(x^2 - 2x - 2).$$

Exemplo Resolvido 247: (IME - Modificada) Fatore

$$x^4 - 12x^3 + 44x^2 - 32x - 52.$$

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

Passo 02: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado do passo 01.

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do passo 02, para a verificação dos termos ainda não utilizados.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 12x^3 + 44x^2 - 32x - 52 \\
 \begin{array}{ccc}
 x^2 & \nearrow & -2 \\
 x^2 & \searrow & 26
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 Rx^2 = 44x^2 - \underbrace{(x^2 \cdot (-2) + x^2 \cdot 26)}_{24x^2}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow Rx^2 = 44x^2 - 24x^2 \Rightarrow Rx^2 = 20x^2$$

$$\begin{array}{rcccl} & & \downarrow & & \\ x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 32x - 52 & & & & \\ \begin{array}{ccc} x^2 & \nearrow & -2x \\ x^2 & \searrow & -10x \end{array} & & \begin{array}{ccc} & \nearrow & -2 \\ & \searrow & 26 \end{array} & \Leftarrow & \text{linha} \\ & & & & \Leftarrow \text{linha} \end{array}$$

Passo 04: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$x^4 - 12x^3 + 44x^2 - 32x - 52 = (x^2 - 2x - 2)(x^2 - 10x + 26).$$

Exemplo Resolvido 248: Fatore $x^4 - 4x^3 + 16x^2 + 40x + 52$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

Passo 02: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado do passo 01.

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do passo 02, para a verificação dos termos ainda não utilizados.

$$\begin{array}{rcccl} & & & & \\ x^4 - 4x^3 + 16x^2 + 40x + 52 & & & & \\ \begin{array}{ccc} x^2 & \nearrow & 2 \\ x^2 & \searrow & 26 \end{array} & & & & \\ & & \downarrow & & \\ & & Rx^2 = 16x^2 - \frac{(x^2 \cdot 2 + x^2 \cdot 26)}{28x^2} & & \end{array}$$

$$\Rightarrow Rx^2 = 16x^2 - 28x^2 \Rightarrow Rx^2 = -12x^2$$

$$\begin{array}{rcccl} & & \downarrow & & \\ x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40x + 52 & & & & \\ \begin{array}{ccc} x^2 & \nearrow & 2x \\ x^2 & \searrow & -6x \end{array} & & \begin{array}{ccc} & \nearrow & 2 \\ & \searrow & 26 \end{array} & \Leftarrow & \text{linha} \\ & & & & \Leftarrow \text{linha} \end{array}$$

Passo 04: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$x^4 - 4x^3 + 16x^2 + 40x + 52 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 6x + 26).$$

No próximo critério iremos fatorar polinômios do 5º grau. Usaremos o teorema do fator ou das raízes racionais e a cruzadinha dupla especial.

6.10) Fatorando Polinômios do 5º grau

Vamos fatorar polinômios do 5º grau, usando o teorema do fator e a cruzadinha dupla especial.

Seguiremos os seguintes passos:

Passo 01: Usamos o teorema do fator ou das raízes racionais.

Passo 02: Como $x - a$ é um fator e o polinômio é do 5º grau, então o outro fator é do 4º grau. Para encontrá-lo podemos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para divisão de polinômios ou usar o artifício abaixo.

Artifício: Utilizamos a identidade de polinômios para obter o outro fator, vejamos os exemplos para ficar mais claro.

Observação: Como o dispositivo de Briot-Ruffini é usado para divisão de polinômios e esse assunto foge aos objetivos desse livro, então iremos usar o artifício em todas as fatorações de polinômios de 5º grau por esse critério.

Passo 03: Usamos a cruzadinha dupla especial.

Exemplo Resolvido 249: Fatore $2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Usando o teorema das raízes racionais, temos que

$a = \frac{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15}{\pm 1, \pm 2}$. Portanto, poderemos ter como raízes:

$\pm 1, \pm 3, \pm 5 \pm 15, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}$ e $\pm \frac{15}{2}$. Assim, por inspeção, temos que $-\frac{1}{2}$ é raiz, logo podemos escrever:

$$\begin{aligned} 2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \\ \Rightarrow 2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 &= \\ &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + \frac{a}{2}x^4 + \frac{b}{2}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + \frac{d}{2}x + \frac{e}{2} \\ \Rightarrow 2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 &= \\ &= ax^5 + \left(\frac{a}{2} + b\right)x^4 + \left(\frac{b}{2} + c\right)x^3 + \left(\frac{c}{2} + d\right)x^2 + \left(\frac{d}{2} + e\right)x + \frac{e}{2} \end{aligned}$$

Passo 02: Por identidade de polinômios, encontramos facilmente os valores de a , b , c , d e e :

$$\boxed{a=2}, \frac{a}{2} + b = 1 \Rightarrow \boxed{b=0}, \Rightarrow \frac{b}{2} + c = -16 \Rightarrow \boxed{c=-16}.$$

$$\frac{c}{2} + d = -8 \Rightarrow \frac{-16}{2} + d = -8 \Rightarrow \boxed{d=0}, \Rightarrow \frac{e}{2} = 15 \Rightarrow \boxed{e=30}.$$

Logo, temos:

$$2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^4 - 16x^2 + 30)$$

$$2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 = \left(x + \frac{1}{2}\right)2 \cdot (x^4 - 8x^2 + 15)$$

$$2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 = (2x+1)(x^4 - 8x^2 + 15).$$

Passo 03: Usamos a cruzadinha dupla especial, para fatorar o termo do quarto grau.

$$2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^4 - 16x^2 + 30)$$

$$2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 = \left(x + \frac{1}{2}\right)2 \cdot (x^4 - 8x^2 + 15)$$

$$2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 = (2x+1)(x^4 - 8x^2 + 15).$$

Exemplo Resolvido 250: Fatore $3x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 19x^2 + 12x - 12$.

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Usando o teorema das raízes racionais, temos que

$$a = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1, \pm 3}. \text{ Portanto, poderemos ter como raízes:}$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3} \text{ e } \pm \frac{4}{3}. \text{ Assim, por inspeção, temos que } -1 \text{ é}$$

raiz, logo podemos escrever:

$$3x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 19x^2 + 12x - 12 = (x+1)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

$$\Rightarrow 3x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 19x^2 + 12x - 12 =$$

$$= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\Rightarrow 3x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 19x^2 + 12x - 12 =$$

$$= ax^5 + (a+b)x^4 + (b+c)x^3 + (c+d)x^2 + (d+e)x + e.$$

Passo 02: Por identidade de polinômios, encontramos facilmente os valores de a, b, c, d e e :

$$\boxed{a=3}, a+b=-5 \Rightarrow \boxed{b=-8}, \Rightarrow b+c=-13 \Rightarrow \boxed{c=-5}.$$

$$c+d=19 \Rightarrow -5+d=19 \Rightarrow \boxed{d=24}, \boxed{e=-12}.$$

Logo, temos:

$$2x^5 + x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 30x + 15 = (x+1)(3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 24x - 12).$$

Passo 03: Usamos a cruzadinha dupla especial, para fatorar o termo do quarto grau.

Exemplo Resolvido 251: Fatore

$$6x^{5m} - 29x^{4m} + 12x^{3m} + 107x^{2m} - 144x^m + 36.$$

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Usando o teorema das raízes racionais, temos que

$$a = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36}{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6}. \text{ Portanto, poderemos ter como}$$

raízes:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{4}{3} \text{ e } \pm \frac{9}{2}. \text{ Assim,}$$

por inspeção, temos que 2 é raiz, logo podemos escrever:

$$\begin{aligned} 6x^{5m} - 29x^{4m} + 12x^{3m} + 107x^{2m} - 144x^m + 36 &= \\ &= (x^m - 2)(ax^{4m} + bx^{3m} + cx^{2m} + dx^m + e) \\ \Rightarrow 6x^{5m} - 29x^{4m} + 12x^{3m} + 107x^{2m} - 144x^m + 36 &= ax^{5m} + bx^{4m} + \\ &+ cx^{3m} + dx^{2m} + ex^m - 2ax^{4m} - 2bx^{3m} - 2cx^{2m} - 2dx^m - 2e \\ \Rightarrow 6x^{5m} - 29x^{4m} + 12x^{3m} + 107x^{2m} - 144x^m + 36 &= \\ &= ax^{5m} + (b-2a)x^{4m} + (c-2b)x^{3m} + (d-2c)x^{2m} + (e-2d)x^m - 2e \end{aligned}$$

Passo 02: Por identidade de polinômios, encontramos facilmente os valores de a, b, c, d e e :

$$\boxed{a=6}, b-2a=-29 \Rightarrow b-12=-29 \Rightarrow \boxed{b=-17}, c-2b=12$$

$$\Rightarrow c-2 \cdot (-17)=12 \Rightarrow c+34=12 \Rightarrow \boxed{c=-22}.$$

$$d-2c=107 \Rightarrow d-2 \cdot (-22)=107 \Rightarrow d+44=107 \Rightarrow \boxed{d=63},$$

$$-2e=36 \Rightarrow \boxed{e=-18}.$$

Logo, temos:

$$6x^{5m} - 29x^{4m} + 12x^{3m} + 107x^{2m} - 144x^m + 36 = \\ = (x^m - 2)(6x^{4m} - 17x^{3m} - 22x^{2m} + 63x^m - 18)$$

Passo 03: Usamos a cruzadinha dupla especial, para fatorar o termo do quarto grau.

Agora veremos a chamada "cruzadinha tripla", uma fatoração para três variáveis fortíssima que segue o mesmo raciocínio das fatorações anteriores, vamos conhecê-la!

6.11) Cruzadinha Tripla

Esse sétimo critério, denominado "cruzadinha tripla", é uma fatoração pouco usada, veremos como utilizá-la. Não esqueça das regras de sinais:

$$"(+) \cdot (+) = +; (-) \cdot (-) = +; (+) \cdot (-) = -".$$

A forma geral, para que tenhamos uma "cruzadinha tripla", é:

3 Variáveis Simples:

$$f(x) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 + Mx + Ny + Pz + Q$$

3 Variáveis Generalizada:

$$f(x) = Ax^{2r} + Bx^r y^s + Cy^{2s} + Dx^r z^t + Eys^t + Fz^{2t} + Mx^r + Ny^s + Pz^t + Q$$

Para fatorá-la, vamos realizar 5 passos, a saber:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $Ax^2 + Bxy + Cy^2$.

Passo 02: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $Cy^2 + Eyz + Fz^2$.

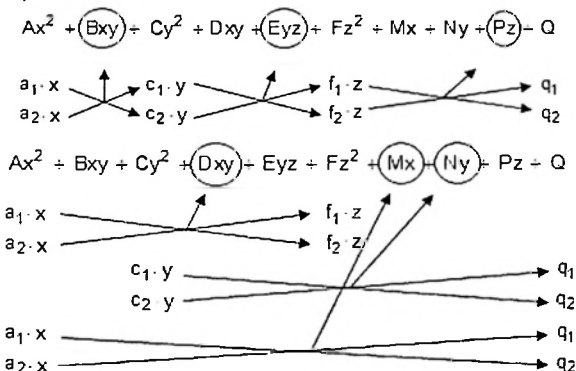
Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $Fz^2 + Pz + Q$.

Passo 04: Verificam-se os termos que não foram usados.

Passo 05: Cada linha forma um fator.

Observação: Sempre colocar o polinômio a ser fatorado em ordem decrescente de expoente e, se faltar algum termo, completar com zeros.

Veja o esquema abaixo:



A operação $(a_1 \cdot x) \cdot (c_2 \cdot y) + (a_2 \cdot x) \cdot (c_1 \cdot y)$ deve resultar no 2º termo.

A operação $(c_2 \cdot y) \cdot (f_1 \cdot z) + (c_1 \cdot y) \cdot (f_2 \cdot z)$ deve resultar no 5º termo.

A operação $(f_1 \cdot z) \cdot (q_2) + (f_2 \cdot z) \cdot (q_1)$ deve resultar no 9º termo.

Verifique se a operação $(a_1 \cdot x) \cdot (f_2 \cdot z) + (a_2 \cdot x) \cdot (f_1 \cdot z)$ resulta no 4º termo.

Verifique se a operação $(c_2 \cdot y) \cdot (q_1) + (c_1 \cdot y) \cdot (q_2)$ resulta no 8º termo.

Verifique se a operação $(a_1 \cdot x) \cdot (q_2) + (a_2 \cdot x) \cdot (q_1)$ resulta no 7º termo.

Exemplo Resolvido 252: Fatore

$$x^2 - xy - 2y^2 + xz + 7yz - 6z^2 - x + 5y - 8z - 2.$$

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica cruzadinha simples para o trinômio $x^2 - xy - 2y^2$.

$$\begin{array}{ccc} x^2 - xy - 2y^2 & & \\ x & \nearrow & -2y \\ x & \searrow & y \end{array}$$

Passo 02: Aplica cruzadinha simples para o trinômio $-2y^2 + 7yz - 6z^2$.

$$\begin{array}{ccc} -2y^2 + 7yz - 6z^2 & & \\ -2y & \nearrow & 3z \\ y & \searrow & -2z \end{array}$$

Passo 03: Aplica cruzadinha simples para o trinômio $-6z^2 - 8z - 2$.

$$\begin{array}{ccc} & -6z^2 - 8z - 2 & \\ 3z & \nearrow & 1 \\ -2z & \searrow & -2 \end{array}$$

Passo 04: Verifica-se os termos que não foram usados.

Passo 05: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$x^2 - xy - 2y^2 + xz + 7yz - 6z^2 - x + 5y - 8z - 2 = (x + y - 2z - 2)(x - 2y + 3z + 1)$$

Exemplo Resolvido 253: Fatore

$$15x^2 + 14xy - 49y^2 - 46xz + 42yz + 16z^2 + 32x + 56y - 74z + 9.$$

Resolução: Vamos resolver passo a passo:

Passo 01: Aplica-se cruzadinha simples no trinômio $15x^2 + 14xy - 49y^2$.

$$\begin{array}{ccc} & 15x^2 + 14xy - 49y^2 & \\ 3x & \nearrow & 7y \\ 5x & \searrow & -7y \end{array}$$

Passo 02: Aplica-se cruzadinha simples no trinômio $-49y^2 + 42yz + 16z^2$.

$$\begin{array}{ccc} & -49y^2 + 42yz + 16z^2 & \\ 7y & \nearrow & -8z \\ -7y & \searrow & -2z \end{array}$$

Passo 03: Aplica-se cruzadinha simples no trinômio $16z^2 - 74z + 9$.

$$\begin{array}{ccc} & 16z^2 - 74z + 9 & \\ -8z & \nearrow & 1 \\ -2z & \searrow & 9 \end{array}$$

Passo 04: Verificam-se os termos que não foram usados.

Passo 05: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$\begin{aligned} & 15x^2 + 14xy - 49y^2 - 46xz + 42yz + 16z^2 + 32x + 56y - 74z + 9 = \\ & = (3x + 7y - 8z + 1)(5x - 7y - 2z + 9). \end{aligned}$$

Problemas Propostos

Questão 6.59 (Turquia-2005-Modificada)

Fatore $x^3 - 6x^2 + 5$.**Questão 6.60 (Turquia-2009-Modificada)**

Fatore $x^3 + 4x^2 - x - 10$.**Questão 6.61**

Fatore $x^3 + 4x^2 - x - 4$.**Questão 6.62**

Fatore $x^3 + 4x^2 + x + 4$.**Questão 6.63**

Fatore $3x^3 + 7x^2 - 4$.**Questão 6.64**

Fatore $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.**Questão 6.65 (Canadá-1996-Modificada)**

Fatore $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5$.**Questão 6.66**

Fatore $4x^3 - 24x^2 + 35x - 12$.**Questão 6.67 (AHSME-1954-Modificada)**

Fatore $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.**Questão 6.68 (AHSME-1954-Modificada)**

Fatore $4x^3 - 8x^2 - 63x - 9$.

Questão 6.69 (AHSME-1980-Modificada)

Fatore $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$.**Questão 6.70 (Stanford-2008-Modificada)**

Fatore $x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.**Questão 6.71**

Fatore $x^3 - 2x^2 - x + 2$.**Questão 6.72**

Fatore $6x^3 + 7x^2 + 13x + 2$.**Questão 6.73**

Fatore $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$.**Questão 6.74**

Fatore $x^3 + x^2 - 2$.**Questão 6.75**

Fatore $x^3 + 4x^2 - 15x - 18$.**Questão 6.76 (Espanha-2003-Modificada)**

Se α é uma raiz de $x^3 + 2x^2 + 10x + 20 = 0$. Mostre que α^2 é um número par.**Questão 6.77**

Fatore $2x^2 - xy - 5x - 3y^2 + 20y - 25$.**Questão 6.78**

Fatore $-3x^2 - 7xy - 2x - 2y^2 - 9y + 5$.**Questão 6.79**

Fatore $8x^2 + 10xy + 3y^2 - 9y - 14x + 6$.**Questão 6.80**

Fatore $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 4$.

Questão 6.81

Fatore $4x^2 + 4xy - 15y^2 - 8x + 76y - 96$.

Questão 6.82

Fatore $10x^2 + xy - 33x - 2y^2 + 15y - 7$.

Questão 6.83

Fatore $3x^2 - 22xy - 17x - 16y^2 - 20y - 6$.

Questão 6.84

Fatore $7x^2 - 22xy + 41x + 3y^2 - 23y + 30$.

Questão 6.85

Fatore $7x^2 + 22xy + 13x + 3y^2 - y - 2$.

Questão 6.86

Fatore $-3x^2 - xy + 5x + y - 2$.

Questão 6.87

Fatore $18x^2 + 43xy + 24y^2 + 27x + 24y$.

Questão 6.88 (Bósnia-2004-Modificada)

Fatore $x^4 - 56x + 15$.

Questão 6.89 (Putnam-2001-Modificada)

Fatore $x^4 - (2n-4)x^2 + (n-2)^2$.

Questão 6.90 (Turquia-2001-Modificada)

Fatore $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 21x - 14$.

Questão 6.91 (Turquia-2004-Modificada)

Fatore $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$.

Questão 6.92 (Turquia-2009-Modificada)

Fatore $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 6x + 15$.**Questão 6.93**

Fatore $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$.**Questão 6.94 (Turquia-2009-Modificada)**

Fatore $n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7$.**Questão 6.95 (Turquia-2012-Modificada)**

Fatore $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 4$.**Questão 6.96 (Turquia-2013-Modificada)**

Fatore $x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9$.**Questão 6.97 (Turquia-2013-Modificada)**

Fatore $n^4 + 2n^3 - 20n^2 + 2n - 21$.**Questão 6.98 (AHSME-1950-Modificada)**

Fatore $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x$.**Questão 6.99 (AHSME-1955-Modificada)**

Fatore $x^4 + 2x^2 + 9$.**Questão 6.100**

Fatore $x^4 + 6x^2 + 25$.**Questão 6.101**

Fatore $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$.**Questão 6.102 (Harvard/MIT-2006-Modificada)**

Fatore $x^4 - 6x^3 + 26x^2 - 46x + 65$.**Questão 6.103 (Stanford-2013-Modificada)**

Fatore $x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 6$.

Questão 6.104 (Stanford-2010)

Determine as raízes de $6x^4 + 17x^3 + 7x^2 - 8x - 4 = 0$.

Questão 6.105

Fatore $6x^4 - x^3 + 17x^2 - 3x - 3$.

Questão 6.106 (Stanford-2002)

Fatore o polinômio $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6$.

Questão 6.107 (CN - 2004 - Modificada)

Fatore $x^2(x^2 + 13) - 6x(x^2 + 2) + 4$.

Questão 6.108

Fatore $3x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 22x - 24$.

Questão 6.109

Fatore $15x^4 + 44x^3 + 7x - 6$.

Questão 6.110

Fatore $x^4 - 27x^2 - 14x + 120$.

Questão 6.111

Fatore $x^{12n} - x^{9n} + 2x^{6n} - x^{3n} + 1$.

Questão 6.112

Fatore $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

Questão 6.113

Fatore $x^4 - 5nx^3 + 4n^2x^2 + 7n^3x - 3n^4$.

Questão 6.114

Fatore $2x^4 - 3nx^3 - 7n^2x^2 - 5n^3x - 3n^4$.

Questão 6.115

Fatore $2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 20x - 24$.

Questão 6.116

Fatore $2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$.**Questão 6.117 (Harvard/MIT-2009 - Modificada)**

Fatore $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.**Questão 6.118**

Fatore $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$.**Questão 6.119**

Fatore $2x^4 + 5x^3 - 41x^2 - 149x - 105$.**Questão 6.120**

Fatore $4x^4 - 23x^3 + 30x^2 - 207x - 54$.**Questão 6.121 (CN-2002 - Modificada)**

Fatore $a^5 - 5a^3 + 4a$.**Questão 6.122 (Brasil-1995-Modificada)**

Fatore $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 8$.**Questão 6.123**

Fatore $x^7 + x^6 - 9x^5 - 13x^4 + 8x^3 + 12x^2$.**Questão 6.124 (Turquia-2001-Modificada)**

Fatore $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 2$.**Questão 6.125 (Turquia-2002-Modificada)**

Fatore $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 2a^2 - 11a - 7$.**Questão 6.126**

Fatore $-x^5 - x^3 + x^2 + 1$.**Questão 6.127 (Princeton-2006-Modificada)**

Fatore $x^5 + 5x^4 - 79x^3 + 64x^2 + 60x + 144$.

Questão 6.128 (Turquia-2011-Modificada)

Fatore $x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2$.**Questão 6.129**

Fatore $12x^5 - 26x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 3x - 2$.**Questão 6.130**

Fatore $3x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 3$.**Questão 6.131**

Fatore $x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4$.**Questão 6.132**

Fatore $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 48x - 32$.**Questão 6.133**

Fatore $x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 48x - 32$.**Questão 6.134**

Fatore $x^2 + 3xz + 6x - 4y^2 - 2yz + 8y + 2z^2 + 11z + 5$.**Questão 6.135**

Fatore $2x^2 - 5xy + 11xz - 3x + 3y^2 - 16yz + 6y + 5z^2 + 12z - 9$.**Questão 6.136**

Fatore $-2x^2 + xy + 4xz - 7x + y^2 - yz - 5y - 2z^2 + 7z + 4$.**Questão 6.137**

Fatore $2x^2 + 5xz + 5x - 2y^2 - 3yz - 3y + 2z^2 + 4z + 2$.**Questão 6.138**

Fatore $3x^2 - xy + 8xz + 4x - 10y^2 + 17yz + 3y - 3z^2 + 2z + 1$.

6.12) Tópicos Avançados em Fatoração

Essa parte de fatorações é bem avançada, são as chamadas Fatorações de Aurifeuille. Há uma aplicação dela numa questão de olimpíada que certamente poucos candidatos fizeram. Vejamos então essas fatorações!

Observação: Essas fatorações não serão demonstradas.

FA1) Potências de 2.

Fatoração para a potência de 2, um pequeno detalhe diferencia uma da outra, confira!

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1).$$

$$2^{4n-2} + 1 = (2^{2n-1} - 2^n + 1)(2^{2n-1} + 2^n + 1).$$

Aplicação da fatoração para potência de 2.

Prove que o número $2^{1992} - 1$ pode ser escrito como produto de seis inteiros maiores que 2^{248} .

Resolução: Vamos resolver passo a passo.

Passo 01: Vamos usar o produto da soma pela diferença, então temos:

$$2^{1992} - 1 = (2^{996})^2 - 1^2 \Rightarrow 2^{1992} - 1 = (2^{996} + 1)(2^{996} - 1)$$

$$\Rightarrow 2^{1992} - 1 = (2^{996} + 1) \left[(2^{498})^2 - 1^2 \right]$$

$$\Rightarrow 2^{1992} - 1 = (2^{996} + 1)(2^{498} + 1)(2^{498} - 1)$$

$$\Rightarrow 2^{1992} - 1 = (2^{996} + 1)(2^{498} + 1) \left[(2^{249})^2 - 1^2 \right]$$

$$\Rightarrow 2^{1992} - 1 = (2^{996} + 1)(2^{498} + 1)(2^{249} + 1)(2^{249} - 1).$$

Passo 02: Note que $2^{996} + 1$ é da forma: $a^3 + b^3$.

Assim, podemos escrever:

$$2^{996} + 1 = (2^{332})^3 + 1^3 \Rightarrow 2^{996} + 1 = (2^{332} + 1) \left[(2^{332})^2 - 2^{332} \cdot 1 + 1^2 \right]$$

$$\therefore 2^{996} + 1 = (2^{332} + 1)(2^{664} - 2^{332} + 1).$$

Passo 03: Usando a fatoração de Aurifeuilean para o $2^{498} + 1$, temos:

$$4n + 2 = 498 \Rightarrow 4n = 498 - 2 \Rightarrow n = \frac{496}{4} \therefore \boxed{n = 124}.$$

$$k = 2n + 1 \Rightarrow k = 2 \cdot 124 + 1 \Rightarrow k = 248 + 1 \therefore \boxed{k = 249}.$$

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1), \text{ com } n = 124$$

$$2^{4 \cdot 124 + 2} + 1 = (2^{2 \cdot 124 + 1} - 2^{124 + 1} + 1)(2^{2 \cdot 124 + 1} + 2^{124 + 1} + 1)$$

$$2^{498} + 1 = (2^{249} - 2^{125} + 1)(2^{249} + 2^{125} + 1).$$

Portanto temos:

$$2^{1992} - 1 = (2^{996} + 1)(2^{249} - 2^{125} + 1)(2^{249} + 2^{125} + 1)(2^{249} + 1)(2^{249} - 1)$$

$$\text{Com } 2^{996} + 1 = (2^{332} + 1)(2^{664} - 2^{332} + 1).$$

FA2) Potência de 3.

Na fatoração para a potência de 3, note que obtemos o produto de três fatores, bastante interessante!

$$3^{6n-3} + 1 = (3^{2n-1} + 1)(3^{2n-1} + 3^n + 1)(3^{2n-1} + 3^n + 1).$$

FA3) Potência de 5.

Na fatoração para a potência de 5, note que obtemos o produto de três fatores, abaixo temos a aplicação dela, confira!

$$5^{5n} - 1 = (5^n - 1) \cdot A \cdot B$$

$$\text{Onde: } A = 5^{2n} + 3 \cdot 5^n - 5^k(5^n + 1) + 1, B = 5^{2n} + 3 \cdot 5^n + 5^k(5^n + 1) + 1$$

$$\text{e } n = 2k - 1.$$

Aplicação da fatoração para potência de 5.

(IMO-Longlist_1985) Fatore $5^{1985} - 1$, como produto de três termos inteiros, cada um maior que 5^{100} .

Resolução: Usando a fatoração de Aurifeuilean, temos:

$$5n = 1985 \Rightarrow n = \frac{1985}{5} \therefore \boxed{n = 397}.$$

$$n = 2k - 1 \Rightarrow 2k - 1 = 397 \Rightarrow 2k = 397 + 1 \Rightarrow k = \frac{398}{2} \therefore \boxed{k = 199}.$$

$$5^{5n} - 1 = (5^n - 1) \cdot A \cdot B.$$

Onde: $A = 5^{2n} + 3 \cdot 5^n - 5^k (5^n + 1) + 1$, $B = 5^{2n} + 3 \cdot 5^n + 5^k (5^n + 1) + 1$
e $n = 2k - 1$.

$$A = 5^{2n} + 3 \cdot 5^n - 5^k (5^n + 1) + 1$$

$$\Rightarrow A = 5^{2 \cdot 397} + 3 \cdot 5^{397} - 5^{199} (5^{397} + 1) + 1$$

$$\Rightarrow A = 5^{794} + 3 \cdot 5^{397} - 5^{199} (5^{397} + 1) + 1.$$

$$B = 5^{2n} + 3 \cdot 5^n + 5^k (5^n + 1) + 1$$

$$\Rightarrow B = 5^{2 \cdot 397} + 3 \cdot 5^{397} + 5^{199} (5^{397} + 1) + 1$$

$$\Rightarrow B = 5^{794} + 3 \cdot 5^{397} + 5^{199} (5^{397} + 1) + 1.$$

$$5^{5n} - 1 = (5^n - 1) \cdot A \cdot B \Rightarrow$$

$$5^{1895} - 1 = (5^{397} - 1) \cdot [5^{794} + 3 \cdot 5^{397} - 5^{199} (5^{397} + 1) + 1] \cdot [5^{794} + 3 \cdot 5^{397} + 5^{199} (5^{397} + 1) + 1].$$

Observação: Há outras fatorações com potências maiores que 5, porém não serão citadas.

Capítulo 07 - Polinômios Simétricos

Introdução

Podemos fatorar polinômios usando os polinômios simétricos ou alternados. É uma ferramenta bastante útil que facilita a fatoração. Vejamos como usar essa ferramenta.

7.1) Polinômios Simétricos

Os polinômios simétricos são aqueles que não se alteram quando trocamos simultaneamente qualquer par de variáveis.

Exemplo: $P(x, y) = x^2 + xy + y^2$ é um polinômio simétrico, pois, ao trocarmos x por y e y por x , obteremos $P(y, x) = y^2 + yx + x^2 = P(x, y)$.

Vejamos como são os casos genéricos dos polinômios simétricos.

7.2) Forma de um Polinômio Simétrico

Vejamos como se comportam alguns polinômios simétrico dependendo do grau e da quantidade de variáveis.

Grau 1 e 2 Variáveis: $P(x, y) = a(x^1 + y^1)$.

Grau 1 e 3 Variáveis: $P(x, y, z) = a(x^1 + y^1 + z^1)$.

Grau 2 e 2 Variáveis: $P(x, y) = a(x^2 + y^2) + b(x^1y^1)$.

Grau 2 e 3 Variáveis: $P(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + b(x^1y^1 + x^1z^1 + y^1z^1)$.

Grau 3 e 2 Variáveis: $P(x, y) = a(x^3 + y^3) + b(x^2y^1 + x^1y^2)$.

Grau 3 e 3 Variáveis:

$P(x, y, z) = a(x^3 + y^3 + z^3) + b(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + c(xyz)$.

Grau 4 e 3 Variáveis:

$P(x, y, z) = a(x^4 + y^4 + z^4) + b(x^3y + x^3z + xy^3 + y^3z + xz^3 + yz^3) +$
 $+ c(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + d(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$.

Grau 5 e 3 Variáveis:

$$\begin{aligned}
 P(x, y, z) = & a(x^5 + y^5 + z^5) + b(x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4) + \\
 & + c(x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + y^3z^2 + x^2z^3 + y^2z^3) + \\
 & + d(x^3yz + xy^3z + xyz^3) + e(x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2).
 \end{aligned}$$

7.3) Propriedades dos Polinômios Simétricos

Vejamos algumas propriedades importantes dos polinômios simétricos.

P1) A soma, o produto e o quociente entre dois polinômios simétricos quaisquer resultam num polinômio simétrico.

P2) (Ida) Seja um polinômio simétrico $P(x, y, z, \dots)$ nas variáveis x e y, z, \dots . Se $P(x, y, z, \dots)$ for anulado para $x = 0$, então também será anulado para $y = 0$, $z = 0, \dots$ e vice-versa, ou seja, ele será divisível por x por y , por z, \dots . Assim, se $P(x, y, z)$ for divisível por x , ele também será divisível por y e z .

P3) (Volta) Se um polinômio simétrico $P(x, y, z, \dots)$ for divisível por x , então será divisível por y, z, \dots e vice-versa, ou seja, se $P(x, y, z)$ é anulado para $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, então x, y e z serão fatores.

P4) (Ida) Se um polinômio simétrico se anula para a igualdade entre duas de suas variáveis, então se anulará para todas as combinações delas, ou seja, será divisível pela **diferença** entre elas ($x = y \Rightarrow x - y = 0$). Além disso a **diferença** entre essas duas variáveis será um fator desse polinômio. Os demais fatores serão determinados de acordo com as expressões (formas) cíclicas (fechadas) no **sentido horário**, como veremos nos exemplos.

P5) (Volta) Se um polinômio simétrico for divisível pela diferença entre duas de suas variáveis, então será divisível por todas as combinações das outras, ou seja, se anulará para a igualdade entre duas variáveis.

P6) (Ida) Se um polinômio simétrico se anula para a igualdade entre uma variável e o oposto de outra, então se anulará para todas as combinações delas, ou seja, será divisível pela **soma** delas ($x = -y \Rightarrow x + y = 0$). Além disso a **soma** dessas duas variáveis será um fator desse polinômio.

Os demais fatores serão determinados de acordo com as expressões (formas) cíclicas (fechadas) no **sentido horário**, como veremos nos exemplos.

P7) (Volta) Se um polinômio simétrico for divisível pela soma de duas variáveis, então será divisível por todas as combinações das outras, ou seja, se anulará para a igualdade entre uma variável e o oposto de outra.

7.4) Fatoração por Polinômio Simétrico

Vamos aprender a fatorar polinômios, por meio dos polinômios simétricos, veja como é uma ferramenta interessante, bastante simples e eficaz!

Para fatorar usando polinômios simétricos, vamos realizar os seguintes passos:

Passo 01: Verifique se o polinômio é simétrico.

Passo 02: Anulamos qualquer uma das variáveis para saber se haverá monômios como fatores.

Passo 03: Igualamos duas variáveis quaisquer para saber se a diferença entre elas é um fator, ou seja, $x = y \Rightarrow x - y = 0$.

Passo 04: Igualamos uma variável qualquer ao oposto de outra para saber se a soma entre elas é um fator, ou seja, $x = -y \Rightarrow x + y = 0$.

Passo 05: Analisamos o grau do polinômio para colocar os fatores que faltam.

Passo 06: Damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar os coeficientes que faltam.

Exemplo Resolvido 254: Fatore $(x+y)^3 - x^3 - y^3$.

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é simétrico.

Passo 02: Note também que o polinômio se anula para $x = 0$ e, pela propriedade P2, se anula para $y = 0$, ou seja, terá os monômios x e y como fatores.

Passo 03: Veja que o polinômio se anula para $x = -y$, ou seja, $x + y$ é fator.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 3 e o produto também é do 3º grau, podemos escrever: $(x+y)^3 - x^3 - y^3 = a \cdot xy(x+y)$.

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $x = 1$ e $y = 2$, temos:

$$(x+y)^3 - x^3 - y^3 = a \cdot xy(x+y) \Rightarrow (1+2)^3 - 1^3 - 2^3 = a \cdot 1 \cdot 2(1+2)$$

$$\Rightarrow 3^3 - 1^3 - 2^3 = a \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 6a = 27 - 1 - 8 \Rightarrow 6a = 18 \therefore a = 3.$$

$$\text{Logo } (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y).$$

$$\text{Resposta: } (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y).$$

Exemplo Resolvido 255: Fatore $(x+y)^4 - x^4 - y^4$.

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é simétrico.

Passo 02: Note também que o polinômio se anula para $x = 0$ e, pela propriedade P2, se anula para $y = 0$, ou seja, terá os monômios x e y como fatores.

Passo 03: Como o grau do polinômio é 4 e o polinômio não se anula para os passos 01 e 02, temos que o outro fator é do 2º grau, então podemos escrever:

$$(x+y)^4 - x^4 - y^4 = xy \left[a \cdot (x^2 + y^2) + b \cdot xy \right].$$

Passo 04: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar os coeficientes que faltam.

Para $x = 1$ e $y = -1$, temos:

$$\underbrace{(1+(-1))^4}_0 - 1^4 - (-1)^4 = 1 \cdot (-1) \left[a \cdot (1^2 + (-1)^2) + b \cdot 1 \cdot (-1) \right]$$

$$\Rightarrow -1 - 1 = (-1) [a \cdot (1+1) - b] \Rightarrow \boxed{2a - b = 2}.$$

Para $x = 2$ e $y = -1$, temos:

$$\underbrace{(1+(-1))^4}_0 - 1^4 - (-1)^4 = 1 \cdot (-1) \left[a \cdot (1^2 + (-1)^2) + b \cdot 1 \cdot (-1) \right]$$

$$\Rightarrow -1 - 1 = (-1) [a \cdot (1+1) - b] \Rightarrow \boxed{2a - b = 2}.$$

Assim, multiplicando a primeira equação por 2, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ 5a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 4 \\ 5a - 2b = 8 \end{cases} \uparrow (-)$$

$$\boxed{a = 4};$$

$$4a - 2b = 4 \Rightarrow 4 \cdot 4 - 2b = 4 \Rightarrow 16 - 4 = 2b \Rightarrow 2b = 12 \Rightarrow \boxed{b = 6}.$$

Portanto, temos:

$$(x+y)^4 - x^4 - y^4 = xy \left[a \cdot (x^2 + y^2) + b \cdot xy \right]$$

$$\Rightarrow (x+y)^4 - x^4 - y^4 = xy \left[4 \cdot (x^2 + y^2) + 6 \cdot xy \right]$$

$$\Rightarrow (x+y)^4 - x^4 - y^4 = 2xy (2x^2 + 2y^2 + 3xy).$$

Resposta: $(x+y)^4 - x^4 - y^4 = 2xy(2x^2 + 2y^2 + 3xy)$.

Exemplo Resolvido 256: Fatore $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é simétrico.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $x = -y$, ou seja, $x + y$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P6, $x + z$ e $y + z$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 3 e o produto dos fatores também é do 3º grau, podemos escrever:

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = a \cdot (x+y)(x+z)(y+z).$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $x = 0$, $y = 1$ e $z = 2$, temos:

$$\begin{aligned} (0+1+2)^3 - 0^3 - 1^3 - 2^3 &= a \cdot (0+1)(0+2)(1+2) \\ \Rightarrow 3^3 - 1 - 8 &= a \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 6a = 27 - 9 \Rightarrow 6a = 18 \therefore a = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Resposta: $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(x+z)(y+z)$.

7.5) Polinômios Alternados

Os polinômios alternados são aqueles cuja mudança simultânea de um par de variáveis quaisquer, resulta no oposto do polinômio original.

Exemplo: $P(x, y, z) = x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)$ é um polinômio simétrico, pois, ao trocarmos x por y e y por x , obteremos:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= y(x-z) + x(z-y) + z(y-x) \\ \Rightarrow P(x, y, z) &= -y(z-x) - x(y-z) - z(x-y) \\ \Rightarrow P(x, y, z) &= -[y(z-x) + x(y-z) + z(x-y)] = -P(x, y, z). \end{aligned}$$

Se trocarmos x por z e z por x , obteremos:

$$P(x, y, z) = z(y - x) + y(x - z) + x(z - y)$$

$$\Rightarrow P(x, y, z) = -z(x - y) - y(z - x) - x(y - z)$$

$$\Rightarrow P(x, y, z) = -[z(x - y) + y(z - x) + x(y - z)] = -P(x, y, z).$$

Se trocarmos y por z e z por y , obteremos:

$$P(x, y, z) = x(z - y) + z(y - x) + y(x - z)$$

$$\Rightarrow P(x, y, z) = -x(y - z) - z(x - y) - y(z - x)$$

$$\Rightarrow P(x, y, z) = -[x(y - z) + z(x - y) + y(z - x)] = -P(x, y, z).$$

7.6) Propriedades dos Polinômios Alternados

Vejamos algumas propriedades importantes dos polinômios alternados.

P1) Não existe polinômio alternado de grau 1 que tenha mais que duas variáveis.

P2) Geralmente escrevemos os polinômios alternados em forma de diferenças e eles são cíclicos (fechados).

P3) (Ida) Seja um polinômio alternado $P(x, y, z, \dots)$ nas variáveis x e y, z, \dots . Se $P(x, y, z, \dots)$ for anulado para $x = 0$, então também será anulado para $y = 0$, $z = 0$... e vice-versa, ou seja, ele será divisível por x por y , por z, \dots . Assim, se $P(x, y, z)$ for divisível por x , ele também será divisível por y e z .

P4) (Volta) Se um polinômio alternado $P(x, y, z, \dots)$ for divisível por x , então será divisível por y, z, \dots , em outras palavras, se $P(x, y, z)$ é anulado para $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, então x, y e z serão fatores.

P5) (Ida) Se um polinômio alternado se anula para a igualdade entre duas de suas variáveis, então se anulará para todas as combinações delas, ou seja, será divisível pela diferença entre elas ($x = y \Rightarrow x - y = 0$). Além disso a diferença entre essas duas variáveis será um fator desse polinômio.

Os demais fatores serão determinados de acordo com as expressões (formas) cíclicas (fechadas) no sentido horário, como veremos nos exemplos.

P6) (Volta) Se um polinômio alternado for divisível pela diferença entre duas de suas variáveis, então será divisível por todas as combinações das outras, ou seja, se anulará para a igualdade entre duas variáveis.

P7) (Ida) Se um polinômio alternado se anula para a igualdade entre uma variável e o oposto de outra, então se anulará para todas as combinações delas, ou seja, será divisível pela soma delas ($x = -y \Rightarrow x + y = 0$). Além disso a soma dessas duas variáveis será um fator desse polinômio. Os demais fatores serão determinados de acordo com as expressões (formas) cíclicas (fechadas) no sentido horário, como veremos nos exemplos.

P8) (Volta) Se um polinômio alternado for divisível pela soma de duas variáveis, então será divisível por todas as combinações das outras, ou seja, se anulará para a igualdade entre uma variável e o oposto de outra.

P9) O produto entre um polinômio simétrico e um alternado resulta em um polinômio alternado.

7.7) Fatoração por Polinômios Alternados

Nesta seção vamos aprender a fatorar polinômios, por meio dos polinômios alternados, é uma abordagem interessante, bastante simples e rápida.

Para fatorar usando polinômios alternados, vamos realizar os seguintes passos:

Passo 01: Verifique se o polinômio é alternado.

Passo 02: Anulamos qualquer uma das variáveis para saber se haverá monômios como fatores.

Passo 03: Igualamos duas variáveis quaisquer para saber se a diferença entre elas é um fator, ou seja, $x = y \Rightarrow x - y = 0$.

Passo 04: Igualamos uma variável qualquer ao oposto de outra para saber se a soma entre elas é um fator, ou seja, $x = -y \Rightarrow x + y = 0$.

Passo 05: Analisamos o grau do polinômio para colocar os fatores que faltam.

Passo 06: Damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar os coeficientes que faltam.

Exemplo Resolvido 257: Fatore $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $x = y$, ou seja, $x - y$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P5, $z - x$ e $y - z$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 3 e o produto dos fatores também é do 3º grau, podemos escrever:

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = a(x-y)(y-z)(z-x).$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $x = 0$, $y = 1$ e $z = 2$, temos:

$$\begin{aligned}(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 &= a(x-y)(y-z)(z-x) \\ \Rightarrow (0-1)^3 + (1-2)^3 + (2-0)^3 &= a(0-1)(1-2)(2-0) \\ \Rightarrow -1-1+8 &= a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \Rightarrow 2a = 6 \therefore \boxed{a = 3}.\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned}(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 &= a(x-y)(y-z)(z-x) \\ \therefore (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 &= 3(x-y)(y-z)(z-x).\end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Exemplo Resolvido 258: Fatore $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$.

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $x = y$, ou seja, $x - y$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P5, $z - x$ e $y - z$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 3 e o produto dos fatores também é do 3º grau, podemos escrever:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = a(x-y)(y-z)(z-x).$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $x = 0$, $y = 1$ e $z = 2$, temos:

$$\begin{aligned}x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) &= a(x-y)(y-z)(z-x) \\ \Rightarrow 0^2(1-2) + 1^2(2-0) + 2^2(0-1) &= a(0-1)(1-2)(2-0) \Rightarrow \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) &= a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \Rightarrow 2a = 2-4 \Rightarrow 2a = -2 \therefore \boxed{a = -1}.\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (-1)(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\therefore x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (x-y)(y-z)(x-z).$$

Resposta: $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (x-y)(y-z)(x-z).$

Exemplo Resolvido 259: Fatore $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y).$

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $x = y$, ou seja, $x - y$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P5, $z - x$ e $y - z$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 4 e o produto dos fatores é do 3º grau, podemos escrever:

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)[a(x+y+z)].$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $x = 0$, $y = 1$ e $z = 2$, temos:

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)[a(x+y+z)]$$

$$\Rightarrow 0^3(1-2) + 1^3(2-0) + 2^3(0-1) = a(0-1)(1-2)(2-0)[a(0+1+2)]$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) = 3a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \Rightarrow 6a = 2 - 8 \Rightarrow 6a = -6 \therefore \boxed{a = -1}.$$

Logo, temos:

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)[a(x+y+z)] \Rightarrow$$

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)[(-1)(x+y+z)]$$

$$\therefore \boxed{x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = (x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}.$$

Problemas Propostos

Questão 7.1

Fatore $(x+y)^5 - x^5 - y^5$.

Questão 7.2 (CN-1995-Modificada)

Se $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = k(a+b)[c^2 + (a+b)c + ab]$, então o valor de k é:

- a) 1 b) 2
c) 3 d) 4
e) 5

Questão 7.3 (Rússia)

Sejam a , b e c números reais distintos dois a dois. Mostre que $a^2 \cdot (c-b) + b^2 \cdot (a-c) + c^2 \cdot (b-a)$ é diferente de zero.

Questão 7.4 (CMO-2009-Modificada)

Fatore $\frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(y + z)(z + x) + xyz}$.

Questão 7.5

Determine o valor das expressões abaixo:

- a) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$
b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$
c) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$
d) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$
e) $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$

$$f) \frac{a^5}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^5}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^5}{(c-a)(c-b)}$$

$$g) \frac{a^6}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^6}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^6}{(c-a)(c-b)}$$

Questão 7.6

Determine o valor das expressões abaixo:

$$a) \frac{a-b}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$b) \frac{(a-b)^2}{(c-a)(b-c)} + \frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}$$

$$c) \frac{(a-b)^3}{(c-a)(b-c)} + \frac{(c-a)^3}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b-c)^3}{(a-b)(c-a)}$$

$$d) \frac{(a-b)^4}{(c-a)(b-c)} + \frac{(c-a)^4}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b-c)^4}{(a-b)(c-a)}$$

$$e) \frac{(a-b)^5}{(c-a)(b-c)} + \frac{(c-a)^5}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b-c)^5}{(a-b)(c-a)}$$

Questão 7.7

Fatore $x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + 2xyz$.

Questão 7.8

Fatore $x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + 3xyz$.

Questão 7.9

Fatore $2z(x-y)^2 + (x+y)(x-z)(y-z) + 8xyz$.

Questão 7.10

Fatore $(x+2y-3z)^3 + (y+2z-3x)^3 + (z+2x-3y)^3$.

Questão 7.11

Fatore $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$.

Questão 7.12

Fatore $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$.

Questão 7.13

Fatore $a^5(b-c) + b^5(c-a) + c^5(a-b)$.

Questão 7.14

Fatore $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$.

Questão 7.15

Fatore $a(b-c)^5 + b(c-a)^5 + c(a-b)^5$.

Questão 7.16

Fatore $a^2(b-c)^3 + b^2(c-a)^3 + c^2(a-b)^3$.

Questão 7.17

Fatore $a^2(b-c)^5 + b^2(c-a)^5 + c^2(a-b)^5$.

Questão 7.18

Fatore $(x-y)(y+z)(z+x) + (y-z)(z+x)(x+y) + (z-x)(x+y)(y+z)$.

Questão 7.19 (BMO-1971)

Fatore $(a+b)^7 - a^7 - b^7$.

Questão 7.20

Fatore $(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$.

Questão 7.21 (União Soviética-1962)

Dados x, y e z distintos entre si. Prove que $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ é divisível por $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Questão 7.22

Fatore $(ab+bc+ca)^3 - abc(a+b+c)^3$.

Questão 7.23

Fatore $(a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7$.

Questão 7.24

Fatore $(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3$.

Questão 7.25

Fatore $(x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 - (x+y-z)^5$.

Capítulo 08 - Somas de Newton

Introdução

As famosas somas de Newton são importantíssimas para polinômios, quando queremos encontrar as somas das n -ésimas potências. É incrível como elas facilitam as contas e tornam a resolução concisa e elegante! Vamos aprender com todos os detalhes essa maravilha que pode ser usada nos mais diversos problemas, vamos lá!

8.1) Somas de Newton Para Dois Termos

Considere o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, cujas raízes são r_1 e r_2 . Note que, se substituirmos r_1 na equação, o resultado será zero, visto que r_1 é raiz de $P(x)$. Então, temos:

$$P(r_1) = a \cdot r_1^2 + b \cdot r_1 + c = 0. \quad (\text{eq1})$$

Note também que, se substituirmos r_2 na equação, o resultado será zero, visto que r_2 é raiz de $P(x)$. Então, temos:

$$P(r_2) = a \cdot r_2^2 + b \cdot r_2 + c = 0. \quad (\text{eq2})$$

$$\text{Somando (eq1) com (eq2): } a \cdot (r_1^2 + r_2^2) + b \cdot (r_1 + r_2) + 2c = 0. \quad (\text{eq3})$$

Conclusões:

- 1) Como $r_1^2 + r_2^2$ tem grau 2, chamaremos de S_2 (soma "2" de Newton). Assim $S_2 = r_1^2 + r_2^2$.
- 2) Como $r_1 + r_2$ tem grau 1, chamaremos de S_1 (soma "1" de Newton). Assim $S_1 = r_1^1 + r_2^1 \Rightarrow S_1 = r_1 + r_2$.
- 3) Como 2 tem grau 0, chamaremos de S_0 (soma "0" de Newton). Assim $S_0 = r_1^0 + r_2^0 \Rightarrow S_0 = 1 + 1 \Rightarrow S_0 = 2$.

Então, podemos escrever: $a \cdot S_2 + b \cdot S_1 + c \cdot S_0 = 0$.

Generalização:

Se multiplicarmos (eq1) por r_1 , temos:

$$a \cdot r_1^3 + b \cdot r_1^2 + c \cdot r_1 = 0. \quad (\text{eq4})$$

Se multiplicarmos (eq2) por r_2 , temos:

$$a \cdot r_2^3 + b \cdot r_2^2 + c \cdot r_2 = 0. \quad (\text{eq5})$$

Somando (eq4) com (eq5):

$$a \cdot (r_1^3 + r_2^3) + b \cdot (r_1^2 + r_2^2) + c \cdot (r_1 + r_2) = 0. \quad (\text{eq6})$$

Conclusões:

1) Como $r_1^3 + r_2^3$ tem grau 3, chamaremos de S_3 (soma "3" de Newton). Assim

$$S_3 = r_1^3 + r_2^3.$$

2) Como $r_1^2 + r_2^2$ tem grau 2, chamaremos de S_2 (soma "2" de Newton). Assim

$$S_2 = r_1^2 + r_2^2.$$

3) Como $r_1 + r_2$ tem grau 1, chamaremos de S_1 (soma "1" de Newton). Assim

$$S_1 = r_1 + r_2 \Rightarrow S_1 = r_1 + r_2.$$

Então, podemos escrever: $a \cdot S_3 + b \cdot S_2 + c \cdot S_1 = 0$.

Assim, seguindo o mesmo raciocínio para $r_1^2, r_1^3, \dots, r_1^{n-2}$, temos:

Se multiplicarmos (eq1) por r_1^{n-2} , temos:

$$a \cdot r_1^{2+n-2} + b \cdot r_1^{1+n-2} + c \cdot r_1^{n-2} = 0 \Rightarrow a \cdot r_1^n + b \cdot r_1^{n-1} + c \cdot r_1^{n-2} = 0. \quad (\text{eq7})$$

Se multiplicarmos (eq2) por r_2^{n-2} , temos:

$$a \cdot r_2^{2+n-2} + b \cdot r_2^{1+n-2} + c \cdot r_2^{n-2} = 0 \Rightarrow a \cdot r_2^n + b \cdot r_2^{n-1} + c \cdot r_2^{n-2} = 0. \quad (\text{eq8})$$

Somando (eq7) com (eq8):

$$a \cdot (r_1^n + r_2^n) + b \cdot (r_1^{n-1} + r_2^{n-1}) + c \cdot (r_1^{n-2} + r_2^{n-2}) = 0. \quad (\text{eq9})$$

Conclusões:

1) Como $r_1^n + r_2^n$ tem grau n, chamaremos de S_n (soma "n" de Newton). Assim

$$S_n = r_1^n + r_2^n.$$

- 2) Como $r_1^{n-1} + r_2^{n-1}$ tem grau $n-1$, chamaremos de S_{n-1} (soma "n - 1" de Newton). Assim $S_{n-1} = r_1^{n-1} + r_2^{n-1}$.
- 3) Como $r_1^{n-2} + r_2^{n-2}$ tem grau $n-2$, chamaremos de S_{n-2} (soma "n - 2" de Newton). Assim $S_{n-2} = r_1^{n-2} + r_2^{n-2}$.

Então, podemos escrever: $a \cdot S_n + b \cdot S_{n-1} + c \cdot S_{n-2} = 0$.

8.2) A Notação Sigma

Considere o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, cujas raízes são r_1 e r_2 . Podemos escrever:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right). \quad (\text{eq1})$$

Por outro lado, a forma fatorada de $P(x)$ é:

$$P(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \Rightarrow P(x) = a \cdot [x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2]. \quad (\text{eq2})$$

Assim, igualando (eq1) com (eq2), temos:

$$P(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot [x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2].$$

Por comparação, podemos escrever:

$$-(r_1 + r_2) = \frac{b}{a} \Rightarrow r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}. \quad (\text{eq3})$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}. \quad (\text{eq4})$$

Conclusões:

- 1) Como $r_1 + r_2$ tem grau 1, chamaremos de σ_1 (soma "1" de Girard). Assim $\sigma_1 = r_1 + r_2$.
- 2) Como $r_1 \cdot r_2$ tem grau 2, chamaremos de σ_2 (soma "2" de Girard). Assim $\sigma_2 = r_1 \cdot r_2$.

Então, podemos escrever:

$$P(x) = a \cdot (x^2 - \sigma_1 \cdot x + \sigma_2) = 0 \Rightarrow x^2 - \sigma_1 \cdot x + \sigma_2 = 0. \quad (\text{eq5})$$

Assim, juntando as duas notações, temos a generalização:

$$S_n - \sigma_1 \cdot S_{n-1} + \sigma_2 \cdot S_{n-2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2}. \quad (\text{eq6})$$

Exemplo Resolvido 260: Sabendo que $P(x) = x^2 + px + q$ tem raízes a e b , calcule $a^4 + b^4$, em função de p e q .

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\sigma_1 = -\frac{p}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -p}, \quad \sigma_2 = +\frac{q}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = q}.$$

$$S_0 = a^0 + b^0 \Rightarrow S_0 = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{S_0 = 2}.$$

$$S_1 = a^1 + b^1 \Rightarrow S_1 = \sigma_1 \Rightarrow \boxed{S_1 = -p}.$$

Assim, podemos escrever para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$:

$$S_2 = \sigma_1 \cdot S_{2-1} - \sigma_2 \cdot S_{2-2} \Rightarrow S_2 = \sigma_1 \cdot S_1 - \sigma_2 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_2 = (-p) \cdot (-p) + q \cdot 2 \Rightarrow \boxed{S_2 = p^2 + 2q}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1$$

$$\Rightarrow S_3 = (-p) \cdot (p^2 + 2q) - q \cdot (-p) \Rightarrow S_3 = -p^3 - 2pq + pq$$

$$\Rightarrow \boxed{S_3 = -p^3 - pq}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2$$

$$\Rightarrow S_4 = (-p) \cdot (-p^3 - pq) - q \cdot (p^2 + 2q) \Rightarrow S_4 = p^4 + p^2q - p^2q - 2q^2$$

$$\Rightarrow S_4 = p^4 - 2q^2 \Rightarrow \boxed{a^4 + b^4 = p^4 - 2q^2}.$$

Resposta: $a^4 + b^4 = p^4 - 2q^2$.

Exemplo Resolvido 261: Seja $x + \frac{1}{x^5} = 3$, então $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Resolução: Note que do enunciado $x + \frac{1}{x} = 3$ e $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, ou seja:

$$\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 1, \quad S_0 = x^0 + \left(\frac{1}{x}\right)^0 \Rightarrow S_0 = 1 + 1 \Rightarrow S_0 = 2,$$

$$S_1 = x^1 + \left(\frac{1}{x}\right)^1 \Rightarrow S_1 = \sigma_1 \Rightarrow S_1 = 3.$$

Assim, podemos escrever para $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$:

$$S_2 = \sigma_1 \cdot S_{2-1} - \sigma_2 \cdot S_{2-2} \Rightarrow S_2 = \sigma_1 \cdot S_1 - \sigma_2 \cdot S_0 \Rightarrow S_2 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ \Rightarrow S_2 = 9 - 2 \Rightarrow \boxed{S_2 = 7}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 \Rightarrow S_3 = 3 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \\ \Rightarrow S_3 = 21 - 3 \Rightarrow \boxed{S_3 = 18}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 \Rightarrow S_4 = 3 \cdot 18 - 1 \cdot 7 \\ \Rightarrow S_4 = 54 - 7 \Rightarrow \boxed{S_4 = 47}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_5 = \sigma_1 \cdot S_4 - \sigma_2 \cdot S_3 \Rightarrow S_5 = 3 \cdot 47 - 1 \cdot 18 \\ \Rightarrow S_5 = 141 - 18 \Rightarrow \boxed{S_5 = 123}.$$

Resposta: $a^5 + b^5 = 123$.

Vejamos agora para três raízes, ou seja, para um polinômio do terceiro grau. Seguiremos o mesmo raciocínio anterior.

8.3) Somas de Newton para Três Termos

Considere o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujas raízes são r_1 , r_2 e r_3 . Note que, se substituirmos r_1 na equação, o resultado será zero, visto que r_1 é raiz de $P(x)$. Então, temos:

$$P(r_1) = a \cdot r_1^3 + b \cdot r_1^2 + c \cdot r_1 + d = 0. \quad (\text{eq1})$$

Note também que, se substituirmos r_2 na equação, o resultado será zero, visto que r_2 é raiz de $P(x)$. Então, temos:

$$P(r_2) = a \cdot r_2^3 + b \cdot r_2^2 + c \cdot r_2 + d = 0. \quad (\text{eq2})$$

Se substituirmos r_3 na equação, o resultado será zero, visto que r_3 é raiz de $P(x)$. Então, temos:

$$P(r_3) = a \cdot r_3^3 + b \cdot r_3^2 + c \cdot r_3 + d = 0. \quad (\text{eq3})$$

Somando (eq1) com (eq2) com (eq3), temos:

$$a \cdot (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) + b \cdot (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + c \cdot (r_1 + r_2 + r_3) + 3d = 0. \quad (\text{eq4})$$

Conclusões:

- 1) Como $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$ tem grau 3, chamaremos de S_3 (soma "3" de Newton).

$$\text{Assim } S_3 = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3.$$

- 2) Como $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ tem grau 2, chamaremos de S_2 (soma "2" de Newton).

$$\text{Assim } S_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

- 3) Como $r_1 + r_2 + r_3$ tem grau 1, chamaremos de S_1 (soma "1" de Newton).

$$\text{Assim } S_1 = r_1^1 + r_2^1 + r_3^1 \Rightarrow S_1 = r_1 + r_2 + r_3.$$

- 4) Como 3 tem grau 0, chamaremos de S_0 (soma "0" de Newton). Assim

$$S_0 = r_1^0 + r_2^0 + r_3^0 \Rightarrow S_0 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow S_0 = 3.$$

Então, podemos escrever: $a \cdot S_3 + b \cdot S_2 + c \cdot S_1 + d \cdot S_0 = 0$.

Generalização:

Se multiplicarmos (eq1) por r_1 , temos:

$$a \cdot r_1^4 + b \cdot r_1^3 + c \cdot r_1^2 + d \cdot r_1 = 0. \quad (\text{eq4})$$

Se multiplicarmos (eq2) por r_2 , temos:

$$a \cdot r_2^4 + b \cdot r_2^3 + c \cdot r_2^2 + d \cdot r_2 = 0. \quad (\text{eq5})$$

Se multiplicarmos (eq2) por r_3 , temos:

$$a \cdot r_3^4 + b \cdot r_3^3 + c \cdot r_3^2 + d \cdot r_3 = 0. \quad (\text{eq6})$$

Somando (eq4) com (eq5) com (eq6), teremos a (eq7):

$$a \cdot (r_1^4 + r_2^4 + r_3^4) + b \cdot (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) + c \cdot (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + d \cdot (r_1 + r_2 + r_3) = 0.$$

Conclusões:

- 1) Como $r_1^4 + r_2^4 + r_3^4$ tem grau 4, chamaremos de S_4 (soma "4" de Newton).

$$\text{Assim } S_4 = r_1^4 + r_2^4 + r_3^4.$$

- 2) Como $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$ tem grau 3, chamaremos de S_3 (soma "3" de Newton).

$$\text{Assim } S_3 = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3.$$

- 3) Como $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ tem grau 2, chamaremos de S_2 (soma "2" de Newton).

$$\text{Assim } S_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

4) Como $S_1 = r_1^1 + r_2^1 + r_3^1 \Rightarrow S_1 = r_1 + r_2 + r_3$ tem grau 1, chamaremos de S_1 (soma "1" de Newton). Assim $S_1 = r_1^1 + r_2^1 + r_3^1 \Rightarrow S_1 = r_1 + r_2 + r_3$.

Então, podemos escrever: $a \cdot S_4 + b \cdot S_3 + c \cdot S_2 + d \cdot S_1 = 0$.

Assim, seguindo o mesmo raciocínio para $r_1^2, r_1^3, \dots, r_1^{n-3}$, temos:

Se multiplicarmos (eq1) por r_1^{n-3} , temos:

$$a \cdot r_1^{3+n-3} + b \cdot r_1^{2+n-3} + c \cdot r_1^{1+n-3} + c \cdot r_1^{0+n-3} = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot r_1^n + b \cdot r_1^{n-1} + c \cdot r_1^{n-2} + d \cdot r_1^{n-3} = 0. \quad (\text{eq8})$$

Se multiplicarmos (eq2) por r_2^{n-3} , temos:

$$a \cdot r_2^{3+n-3} + b \cdot r_2^{2+n-3} + c \cdot r_2^{1+n-3} + c \cdot r_2^{0+n-3} = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot r_2^n + b \cdot r_2^{n-1} + c \cdot r_2^{n-2} + d \cdot r_2^{n-3} = 0. \quad (\text{eq9})$$

Se multiplicarmos (eq3) por r_3^{n-3} , temos:

$$a \cdot r_3^{3+n-3} + b \cdot r_3^{2+n-3} + c \cdot r_3^{1+n-3} + c \cdot r_3^{0+n-3} = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot r_3^n + b \cdot r_3^{n-1} + c \cdot r_3^{n-2} + d \cdot r_3^{n-3} = 0. \quad (\text{eq10})$$

Somando (eq8) com (eq9) com (eq10):

$$a \cdot (r_1^n + r_2^n + r_3^n) + b \cdot (r_1^{n-1} + r_2^{n-1} + r_3^{n-1}) + c \cdot (r_1^{n-2} + r_2^{n-2} + r_3^{n-2}) +$$

$$+ d \cdot (r_1^{n-3} + r_2^{n-3} + r_3^{n-3}) = 0. \quad (\text{eq11})$$

Conclusões:

1) Como $r_1^n + r_2^n + r_3^n$ tem grau n , chamaremos de S_n (soma "n" de Newton).

$$\text{Assim } S_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n.$$

2) Como $r_1^{n-1} + r_2^{n-1} + r_3^{n-1}$ tem grau $n-1$, chamaremos de S_{n-1} (soma "n-1" de Newton). Assim $S_{n-1} = r_1^{n-1} + r_2^{n-1} + r_3^{n-1}$.

3) Como $r_1^{n-2} + r_2^{n-2} + r_3^{n-2}$ tem grau $n-2$, chamaremos de S_{n-2} (soma "n-2" de Newton). Assim $S_{n-2} = r_1^{n-2} + r_2^{n-2} + r_3^{n-2}$.

4) Como $r_1^{n-3} + r_2^{n-3} + r_3^{n-3}$ tem grau $n-3$, chamaremos de S_{n-3} (soma "n-3" de Newton). Assim $S_{n-3} = r_1^{n-3} + r_2^{n-3} + r_3^{n-3}$.

Então, podemos escrever: $a \cdot S_n + b \cdot S_{n-1} + c \cdot S_{n-2} + d \cdot S_{n-3} = 0$.

8.4) A Notação Sigma

Considere o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujas raízes são r_1 , r_2 e r_3 . Podemos escrever:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow P(x) = a \cdot \left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right). \quad (\text{eq1})$$

Por outro lado, a forma fatorada de $P(x)$ é:

$$P(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \Rightarrow$$

$$P(x) = a \cdot \left[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \right]. \quad (\text{eq2})$$

Assim, igualando (eq1) com (eq2), temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= a \cdot \left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right) = \\ &= a \cdot \left[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \right]. \end{aligned}$$

Por comparação, podemos escrever:

$$-(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{b}{a} \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}. \quad (\text{eq3})$$

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \frac{c}{a}. \quad (\text{eq4})$$

$$-(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3) = \frac{d}{a} \Rightarrow r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a}. \quad (\text{eq5})$$

Conclusões:

- 1) Como $r_1 + r_2 + r_3$ tem grau 1, chamaremos de σ_1 (soma "1" de Girard). Assim $\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3$.
- 2) Como $r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$ tem grau 2, chamaremos de σ_2 (soma "2" de Girard). Assim $\sigma_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$.
- 3) Como $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ tem grau 3, chamaremos de σ_3 (soma "3" de Girard). Assim $\sigma_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$.

Então, podemos escrever a (eq5):

$$P(x) = a \cdot (x^3 - \sigma_1 \cdot x^2 + \sigma_2 \cdot x - \sigma_3) = 0 \Rightarrow x^3 - \sigma_1 \cdot x^2 + \sigma_2 \cdot x - \sigma_3 = 0.$$

Assim, juntando as duas notações, temos a generalização:

$$S_n - \sigma_1 \cdot S_{n-1} + \sigma_2 \cdot S_{n-2} - \sigma_3 \cdot S_{n-3} = 0 \text{ ou}$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}. \quad (\text{eq6})$$

Generalização para um Polinômio de Grau n.

Para um polinômio qualquer $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ de grau n, temos:

$$S_n - \sigma_1 \cdot S_{n-1} + \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n \cdot S_0 = 0.$$

Onde:

$$S_n = r_1^n + r_2^n + \dots + r_n^n$$

$$\sigma_1 = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

$$\sigma_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \dots + r_{n-1} \cdot r_n$$

$$(\dots\dots\dots)$$

$$\sigma_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n.$$

Observações:

- 1) Se o polinômio tem 2 raízes, então precisamos de duas somas para encontrar as demais (nesse caso, precisamos de S_0 e S_1). Se o polinômio tem 3 raízes, então precisamos de três somas para encontrar as demais (nesse caso, precisamos de S_0 , S_1 e S_2). E assim por diante.
- 2) Note que S_0 sempre será igual à quantidade de raízes, visto que

$$S_0 = r_1^0 + r_2^0 + \dots + r_n^0 \Rightarrow S_0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{"n" vezes}} \therefore S_0 = n.$$

- 3) Note que S_1 sempre será igual a σ_1 , visto que

$$S_1 = r_1^1 + r_2^1 + \dots + r_n^1 \Rightarrow S_1 = r_1 + r_2 + \dots + r_n \therefore S_1 = \sigma_1.$$

Exemplo Resolvido 262: Prove que

$$ax^{n-2} + by^{n+2} = (x+y)(ax^{n+1} + by^{n+1}) - xy(ax^n + by^n).$$

Resolução: Considere o polinômio genérico $P(t) = A \cdot (t^2 - \sigma_1 \cdot t + \sigma_2)$, cujas raízes são x e y .

Note que, se substituirmos x na equação, o resultado será zero, visto que x é raiz de $P(t)$. Então, temos:

$$P(x) = A \cdot (x^2 - \sigma_1 \cdot x + \sigma_2) = 0 \Rightarrow x^2 - \sigma_1 \cdot x + \sigma_2 = 0. \quad (\text{eq1})$$

Note também que, se substituirmos y na equação, o resultado será zero, visto que y é raiz de $P(t)$. Então, temos:

$$P(y) = A \cdot (y^2 - \sigma_1 \cdot y + \sigma_2) = 0 \Rightarrow y^2 - \sigma_1 \cdot y + \sigma_2 = 0. \quad (\text{eq2})$$

Se multiplicarmos (eq1) por ax^n , temos:

$$x^2 - \sigma_1 \cdot x + \sigma_2 = 0 \Rightarrow a \cdot x^{n+2} - a \cdot \sigma_1 \cdot x^{n+1} + a \cdot \sigma_2 \cdot x^n = 0. \quad (\text{eq3})$$

Se multiplicarmos (eq2) por by^n , temos:

$$y^2 - \sigma_1 \cdot y + \sigma_2 = 0 \Rightarrow b \cdot y^{n+2} - b \cdot \sigma_1 \cdot y^{n+1} + b \cdot \sigma_2 \cdot y^n = 0. \quad (\text{eq4})$$

Somando (eq3) com (eq4):

$$\begin{aligned} ax^{n+2} + by^{n+2} - \sigma_1 \cdot (ax^{n+1} + by^{n+1}) + \sigma_2 \cdot (ax^n + by^n) &= 0 \\ \Rightarrow ax^{n+2} + by^{n+2} = \sigma_1 \cdot (ax^{n+1} + by^{n+1}) - \sigma_2 \cdot (ax^n + by^n) \\ \therefore ax^{n+2} + by^{n+2} = (x + y)(ax^{n+1} + by^{n+1}) - xy(ax^n + by^n). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 263: Prove que

$$\begin{aligned} ax^{n+3} + by^{n+3} + cz^{n+3} &= (x + y + z)(ax^{n+2} + by^{n+2} + cz^{n+2}) - \\ &- (xy + xz + yz)(ax^{n+1} + by^{n+1} + cz^{n+1}) + xyz(ax^n + by^n + cz^n). \end{aligned}$$

Resolução: Considere o polinômio genérico $P(t) = A \cdot (t^3 - \sigma_1 \cdot t^2 + \sigma_2 \cdot t - \sigma_3)$, cujas raízes são x , y e z .

Note que, se substituirmos x na equação, o resultado será zero, visto que x é raiz de $P(t)$. Então, temos:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^3 - \sigma_1 \cdot x^2 + \sigma_2 \cdot x - \sigma_3 = 0. \quad (\text{eq1})$$

Note também que, se substituirmos y na equação, o resultado será zero, visto que y é raiz de $P(t)$. Então, temos:

$$P(y) = 0 \Rightarrow y^3 - \sigma_1 \cdot y^2 + \sigma_2 \cdot y - \sigma_3 = 0. \quad (\text{eq2})$$

Note também que, se substituirmos z na equação, o resultado será zero, visto que z é raiz de $P(t)$. Então, temos:

$$P(z) = 0 \Rightarrow z^3 - \sigma_1 \cdot z^2 + \sigma_2 \cdot z - \sigma_3 = 0. \quad (\text{eq3})$$

Se multiplicarmos (eq1) por ax^n , temos:

$$\begin{aligned} x^3 - \sigma_1 \cdot x^2 + \sigma_2 \cdot x - \sigma_3 &= 0 \\ \Rightarrow a \cdot x^{n+3} - a \cdot \sigma_1 \cdot x^{n+2} + a \cdot \sigma_2 \cdot x^{n+1} - a \cdot \sigma_3 \cdot x^n &= 0. \quad (\text{eq4}) \end{aligned}$$

Se multiplicarmos (eq2) por by^n , temos:

$$\begin{aligned} y^3 - \sigma_1 \cdot y^2 + \sigma_2 \cdot y - \sigma_3 &= 0 \\ \Rightarrow b \cdot y^{n+3} - b \cdot \sigma_1 \cdot y^{n+2} + b \cdot \sigma_2 \cdot y^{n+1} - b \cdot \sigma_3 \cdot y^n &= 0. \quad (\text{eq5}) \end{aligned}$$

Se multiplicarmos (eq3) por cz^n , temos:

$$\begin{aligned} z^3 - \sigma_1 \cdot z^2 + \sigma_2 \cdot z - \sigma_3 &= 0 \\ \Rightarrow c \cdot z^{n+3} - c \cdot \sigma_1 \cdot z^{n+2} + c \cdot \sigma_2 \cdot z^{n+1} - c \cdot \sigma_3 \cdot z^n &= 0. \quad (\text{eq6}) \end{aligned}$$

Somando as três últimas equações:

$$\begin{aligned} ax^{n+3} + by^{n+3} + cz^{n+3} - \sigma_1 \cdot (ax^{n+2} + by^{n+2} + cz^{n+2}) + \\ + \sigma_2 \cdot (ax^{n+1} + by^{n+1} + cz^{n+1}) - \sigma_3 \cdot (ax^n + by^n + cz^n) &= 0 \\ \Rightarrow ax^{n+3} + by^{n+3} + cz^{n+3} = \sigma_1 \cdot (ax^{n+2} + by^{n+2} + cz^{n+2}) - \\ - \sigma_2 \cdot (ax^{n+1} + by^{n+1} + cz^{n+1}) + \sigma_3 \cdot (ax^n + by^n + cz^n) \end{aligned}$$

$$\therefore ax^{n+3} + by^{n+3} + cz^{n+3} = (x+y+z)(ax^{n+2} + by^{n+2} + cz^{n+2}) - \\ - (xy + xz + yz)(ax^{n+1} + by^{n+1} + cz^{n+1}) + xyz(ax^n + by^n + cz^n).$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo Resolvido 264: Sabendo que $P(x) = 2x^3 - 12x^2 - 4x + 6$ tem raízes a, b e c , calcule $a^5 + b^5 + c^5$.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\sigma_1 = -\frac{-12}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 6}, \sigma_2 = +\frac{(-4)}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = -2}, \sigma_3 = -\frac{6}{2} \\ \Rightarrow \boxed{\sigma_3 = -3}, S_0 = a^0 + b^0 + c^0 \Rightarrow S_0 = 1+1+1 \Rightarrow \boxed{S_0 = 3}. \\ S_1 = a^1 + b^1 + c^1 \Rightarrow S_1 = \sigma_1 \Rightarrow \boxed{S_1 = 6}, S_2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ \Rightarrow S_2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) \Rightarrow S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ \Rightarrow S_2 = 6^2 - 2 \cdot (-2) \Rightarrow S_2 = 36 + 4 \Rightarrow \boxed{S_2 = 40}.$$

Assim, podemos escrever, para $n=3, n=4$ e $n=5$:

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3} \\ \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_{3-1} - \sigma_2 \cdot S_{3-2} + \sigma_3 \cdot S_{3-3} \\ \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0 \Rightarrow S_3 = 6 \cdot 40 - (-2) \cdot 6 + (-3) \cdot 3 \\ \Rightarrow S_3 = 240 + 12 - 9 \Rightarrow \boxed{S_3 = 243}. \\ S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} \\ \Rightarrow S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 + \sigma_3 \cdot S_1 \Rightarrow S_4 = 6 \cdot 243 - (-2) \cdot 40 + (-3) \cdot 6 \\ \Rightarrow S_4 = 1458 + 80 - 18 \Rightarrow \boxed{S_4 = 1520}. \\ S_5 = \sigma_1 \cdot S_{5-1} - \sigma_2 \cdot S_{5-2} + \sigma_3 \cdot S_{5-3} \\ \Rightarrow S_5 = \sigma_1 \cdot S_4 - \sigma_2 \cdot S_3 + \sigma_3 \cdot S_2 \Rightarrow S_5 = 6 \cdot 1520 - (-2) \cdot 243 + (-3) \cdot 40 \\ \Rightarrow S_5 = 9120 + 486 - 120 \Rightarrow \boxed{S_5 = 9486}.$$

Resposta: $a^5 + b^5 + c^5 = 9486$.

Exemplo Resolvido 265: Sabendo que as raízes de $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 4$ são a, b e c , determine $a^3 + b^3 + c^3$.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\sigma_1 = -\frac{5}{2}, \sigma_2 = +\frac{4}{2} \Rightarrow \sigma_2 = 2, \sigma_3 = -\frac{(-4)}{2} \Rightarrow \sigma_3 = 2.$$

$$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 \Rightarrow S_0 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow S_0 = 3.$$

$$S_1 = a^1 + b^1 + c^1 \Rightarrow S_1 = \sigma_1 \Rightarrow S_1 = -\frac{5}{2}, S_2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow S_2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) \Rightarrow S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$\Rightarrow S_2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow S_2 = \frac{25}{4} - 4 \Rightarrow S_2 = \frac{25 - 16}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{9}{4}.$$

Assim, podemos escrever, para $n = 3$:

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3} \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_{3-1} - \sigma_2 \cdot S_{3-2} + \sigma_3 \cdot S_{3-3}$$

$$\Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0 \Rightarrow S_3 = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow S_3 = -\frac{45}{8} + 5 + 6 \Rightarrow S_3 = -\frac{45}{8} + 11 \Rightarrow S_3 = \frac{-45 + 88}{8} \Rightarrow S_3 = \frac{43}{8}.$$

Resposta: $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{43}{8}.$

Exemplo Resolvido 266: Se $a + b + c = 0$, prove que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Resolução: Sejam a, b e c as raízes da equação polinomial

$P(x) = x^3 - \sigma_1 \cdot x^2 + \sigma_2 \cdot x - \sigma_3$, então temos:

$$\sigma_1 = a + b + c \Rightarrow \sigma_1 = 0.$$

$$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 \Rightarrow S_0 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow S_0 = 3.$$

$$S_1 = a^1 + b^1 + c^1 \Rightarrow S_1 = \sigma_1 \Rightarrow S_1 = 0, S_2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow S_2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) \Rightarrow S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$\Rightarrow S_2 = (0)^2 - 2 \cdot \sigma_2 \Rightarrow S_2 = -2\sigma_2.$$

Assim, podemos escrever, para $n = 3$:

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$$

$$\Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_{3-1} - \sigma_2 \cdot S_{3-2} + \sigma_3 \cdot S_{3-3}$$

$$\Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0 \Rightarrow S_3 = 0 \cdot (-2\sigma_2) - \sigma_2 \cdot 0 + \sigma_3 \cdot 3$$

$$\Rightarrow S_3 = 3\sigma_3 \quad \therefore \boxed{S_3 = 3abc}.$$

Resposta: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Vamos aos problemas propostos. Se você entendeu a resolução de todos os exemplos resolvidos, vai conseguir resolver **todos** os exercícios desta lista. Divirta-se com esses problemas e, se não conseguir, veja a resolução lá no capítulo de resoluções!

Problemas Propostos

Questão 8.1

Se $x + \frac{1}{x} = 1$, determine o valor de $\sqrt[5]{x^5 + \frac{1}{x^5}}$.

Questão 8.2 (Stanford-2010)

Se $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, determine o valor de $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Questão 8.3

Se $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$, determine o valor de $x^7 + \frac{1}{x^7}$.

Questão 8.4 (Stanford-2006-Modificada)

Sejam $x + y = a$ e $xy = b$. Calcule $x^6 + y^6$.

Questão 8.5

Calcule o valor de $\left(\frac{5 + \sqrt{21}i}{2}\right)^5 + \left(\frac{5 - \sqrt{21}i}{2}\right)^5$.

Questão 8.6

Se $x^2 - 3x + 1 = 0$, determine o valor de $x^9 + x^7 + x^{-9} + x^{-7}$.

Questão 8.7

Se $a + b + c = 0$, prove que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Questão 8.8

Se $a + b + c = 0$, prove que $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$.

Questão 8.9

Se $a + b + c = 0$, prove que $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}$.

Questão 8.10

Se $a + b + c = 0$, prove que $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc)$.

Questão 8.11

Sejam a, b e c inteiros positivos, tais que $a = b + c$. Prove que $a^4 + b^4 + c^4$ é o dobro do quadrado de um inteiro positivo.

Questão 8.12

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{3abc(ac + bc + ab)}$.

Questão 8.13

Se $a + b + c = 0$, prove que $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$.

Questão 8.14 (Harvard/MIT-2008)

Sejam a, b, c são números reais não nulos, tais que $a + b + c = 0$, $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Determine $a^2 + b^2 + c^2$.

Questão 8.15

Se $a + b + c = 0$, prove que

$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2.$$

Questão 8.16

Se $a + b + c = 0$, prove que $a^6 + b^6 + c^6 = 3a^2b^2c^2 - 2(ab + bc + ca)^3$.

Questão 8.17

Se $a + b + c = 0$, prove que

$$a^6 + b^6 + c^6 = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2}{3} + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{4}.$$

Questão 8.18

Se $a + b + c = 0$, prove que $a^7 + b^7 + c^7 = 7abc(ab + bc + ca)^2$.

Questão 8.19 (Croácia 2001)

Se $a + b + c = 0$, determine o valor de $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc(a^4 + b^4 + c^4)}$.

Questão 8.20

Se $a + b + c = 0$, prove que

$$a^7 + b^7 + c^7 = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)}{3} + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)}{2}.$$

Questão 8.21

Se $a + b + c = 0$, prove que $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3}$.

Questão 8.22

Se $a + b + c = 0$, prove que $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} \cdot \frac{(a^4 + b^4 + c^4)}{2}$.

Questão 8.23

Se $a + b + c = 0$, prove que

$$a^8 + b^8 + c^8 = 2(ab + bc + ca) \left[(ab + bc + ca)^3 - 4a^2b^2c^2 \right].$$

Questão 8.24

Se $a + b + c = 0$, prove que

$$a^8 + b^8 + c^8 = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)^2}{9} + \frac{(a^4 + b^4 + c^4)^2}{2}.$$

Questão 8.25

Se $a + b + c = 0$, prove que $a^9 + b^9 + c^9 = 3abc \left[a^2b^2c^2 - 3(ab + bc + ca)^3 \right]$.

Questão 8.26

Se $a + b + c = 0$, prove que

$$a^9 + b^9 + c^9 = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^3}{9} + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)}{4}.$$

Questão 8.27

Se $a + b + c + d = 0$, prove que $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + abd + acd + bcd)$.

Questão 8.28

Se $a + b + c + d = 0$, prove que

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 - 4abcd.$$

Questão 8.29

Se $a + b + c + d = 0$, prove que

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}{2} - 4abcd.$$

Questão 8.30

Se $a + b + c + d = 0$, prove que

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = -5(ab + ac + ad + bc + bd + cd)(abc + abd + acd + bcd).$$

Questão 8.31

Se $a + b + c + d = 0$, prove que

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{3}.$$

Questão 8.32

Se $a + b + c + d = 0$, prove que $\frac{a^6 + b^6 + c^6 + d^6}{6} = \sigma_2 \cdot \sigma_4 - \frac{\sigma_2^3}{3} + \frac{\sigma_3^2}{2}$.

Questão 8.33

Se $a + b + c + d = 0$, prove que $a^7 + b^7 + c^7 + d^7 = 7\sigma_3(\sigma_2^2 - \sigma_4)$.

Questão 8.34

Se $a + b + c + d = 0$, prove que $\frac{a^7 + b^7 + c^7 + d^7}{7} = \left[\frac{(S_2)^2}{8} + \frac{S_4}{4} \right] \cdot \frac{S_3}{3}$.

Questão 8.35

Prove que $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$.

Questão 8.36

Mostre que, se $x + y = 0$, então $2x^n + 2y^n = (x^2 + y^2)(x^{n-2} + y^{n-2})$.

Questão 8.37

Prove que $x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x^2 + y^2)(x^{2n-1} - y^{2n-1}) - x^2 y^2 (x^{2n-3} - y^{2n-3})$.

Questão 8.38 (Putnam 1959)

Prove que $x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x^{2n-1} - \frac{1}{x^{2n-1}} \right) - \left(x^{2n-3} - \frac{1}{x^{2n-3}} \right)$.

Questão 8.39

Prove que $x^n + y^n + z^n = (x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1})(x + y + z) - (xy + xz + yz)(x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) + xyz(x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3})$.

Questão 8.40

Mostre que, se $a + b + c = 0$, então $a^n + b^n + c^n = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2})}{2} + \frac{(a^3 + b^3 + c^3)(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3})}{3}$.

Questão 8.41 (AIME-1990)

Determine $ax^5 + by^5$ se os números reais a, b, x e y satisfazem as equações $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$, $ax^4 + by^4 = 42$.

Questão 8.42

Sejam a e b números reais não nulos tais que x e y satisfazem o sistema

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ ax^2 + by^2 = 20 \\ ax^3 + by^3 = 56 \\ ax^4 + by^4 = 272 \end{cases}$$

Determine o valor de $ax^5 + by^5$.

Questão 8.43 (CN-1988)

A equação do 2º grau $x^2 - 2x + m$, $m < 0$ tem raízes x_1 e x_2 . Se

$x_1^{n-2} + x_2^{n-2} = a$ e $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} = b$, então $x_1^n + x_2^n$ é igual a:

- a) $2a + mb$
- b) $2b - ma$
- c) $ma + 2b$
- d) $ma - 2b$
- e) $m(a - 2b)$

Questão 8.44

Se $a + b + c = 0$, qual o valor de $\frac{(a+b-2c)^2 + (a+c-2b)^2 + (b+c-2a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$?

Questão 8.45 (IMO-Longlist-1988/AHSME-1975)

Se p , q e r são as raízes distintas da equação $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, determine o valor de $p^3 + q^3 + r^3$.

Questão 8.46 (Putnam-1939-Modificada)

As raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são α , β e γ . Determine $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Questão 8.47 (Singapura-2014)

Se α e β são as raízes da equação $3x^2 + x - 1 = 0$, onde $\alpha > \beta$, determine o valor de $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$.

Questão 8.48 (Turquia-2004)

Qual a soma dos cubos das raízes da equação $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$?

Questão 8.49 (Turquia-2012)

Sejam a , b e c são as raízes da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$. Determine $a^8 + b^8 + c^8$.

Questão 8.50 (AIME-2008)

Sejam r , s e t as três raízes da equação $8x^3 + 1001x + 2008 = 0$. Determine $(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3$.

Questão 8.51 (AHSME-1951)

Se r e s são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então o valor de $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$ é:

- a) $b^2 - 4ac$ b) $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$
c) $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$ d) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

Questão 8.52 (AHSME-1955)

Se r e s as três raízes da equação $x^2 - px + q = 0$, então $r^2 + s^2$ é:

- a) $p^2 + 2q$ b) $p^2 - 2q$ c) $p^2 + q^2$
d) $p^2 - q^2$ e) p^2

Questão 8.53 (Harvard/MIT-2008)

A equação $x^3 - 9x^2 + 8x + 2 = 0$, possui três raízes p , q , r . Determine $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}$.

Questão 8.54 (BMO-2007)

Determine o valor de $\frac{1^4 + 2007^4 + 2008^4}{1^2 + 2007^2 + 2008^2}$.

Questão 8.55 (Singapura-2014)

Determine o valor de $\frac{2014^3 - 2013^3 - 1}{2013 \cdot 2014}$.

Questão 8.56 (Stanford-2013)

Sejam a e b as soluções de $x^2 - 7x + 17 = 0$. Determine $a^4 + b^4$.

Questão 8.57 (Stanford-2007)

Sejam a, b, c as raízes da equação $x^3 - 7x^2 - 6x + 5 = 0$. Determine o valor de $(a+b)(a+c)(b+c)$.

Questão 8.58 (Stanford-2007)

Se $r+s+t=3$, $r^2+s^2+t^2=1$ e $r^3+s^3+t^3=3$, calcule $r \cdot s \cdot t$.

Questão 8.59

Sejam a, b e c inteiros positivos, tais que $a = b + c$. Prove que $a^4 + b^4 + c^4$ é o dobro do quadrado de um inteiro positivo.

Questão 8.60

Determine o valor de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$.

Questão 8.61 (CN-1998)

Sejam $x = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997} + (2-\sqrt{3})^{1997}}{2}$ e $y = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997} - (2-\sqrt{3})^{1997}}{\sqrt{3}}$, o

valor de $4x^2 - 3y^2$ é:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Questão 8.62 (Áustria Competição Federal-2013)

Para três números a, b e c , seja $S_n = a^n + b^n + c^n$, sabendo que $S_1 = 2, S_2 = 6$ e $S_3 = 14$. Prove que, para todo número natural $n > 1$, temos

$$|S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1}| = 8.$$

Capítulo 09 – Respostas e Sugestões

Capítulo 01 – Potenciação

1.1) C.

1.2) 256^{abcd} .

1.3) $4a^2 \cdot m^m \cdot n^n \cdot 9b^2 \cdot m^m \cdot n^n \cdot 49c^2 \cdot m^m \cdot n^n$.

1.4) C.

1.5) 10^{-40} .

1.6) 10^{n-1} .

1.7) 9.

1.8) $(x^2)^{n^k+m+k}$.

1.9) $(ab)^{a-b}$.

1.10) $a^{b^{(a-1)}} \cdot b^{a^{(b-1)}}$.

1.11) $n = 4$.

1.12) $2^{3^{10\,080}}$.

1.13) x^{x^x} .

1.14) $x^{\left(\frac{x^{x-2}-x^2}{x-1}\right)}$.

1.15) $a^{3^{50}} \cdot b^{3^{50}}$.

1.16) $a^{3^{100}} \cdot b^{4^{100}} \cdot c^{5^{100}}$.

1.17) $x^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

1.18) $x^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$.

1.19) $x^{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$.

1.20) $x^{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$.

1.21) $a^{\frac{5}{b^{12}}}$.

1.22) $4 \cdot a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{5}{6}}$.

1.23) D.

1.24) A.

1.25) E.

1.26) $m^{m-1}(m^2+1)$.

1.27) $a^{+n^2} \cdot b^{-n^3} \cdot c^{+n^4}$.

1.28) $a^{\frac{n^2+n^3}{2}}$.

1.29) $a^{\frac{n^{n-1}-n}{n-1}}$.

Capítulo 02 – Radiciação

2.1) $\sqrt[72]{a}$.

2.2) 1999^9 .

2.3) D.

2.4) D.

2.5) $r = 4$ e $s = 5$.

2.6) 14.

2.7) $\frac{b}{a}$.

2.8) $\frac{5}{2}$.

2.9) a.

2.10) $\sqrt[180]{a^{79}}$.

2.11) a^n .

2.12) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

2.13) 1.

2.14) 8.

2.15) $ab\sqrt{a^{a+b} \cdot b}$.

2.16) 2.

2.17) 1.

2.18) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(1+2\sqrt{2})}$.

2.19) 5.

2.20) $3^3 \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)$.

2.21) B.

2.22) a^{m+2} .

2.23) $168 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[5]{49}$.

2.24) $24\sqrt[4]{2^{11}}$.

2.25) $a^{-\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}}$.

2.26) $x^{\left(-\frac{5}{8}\right)}$.

2.27) $x^{\sqrt[4]{x^3}}$.

2.28) B.

2.29) E.

2.30) $x^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

2.31) 729.

2.32) 2^{250} .

2.33) $2^{\frac{43}{60}}$.

2.34) $7^{\frac{17}{80}}$.

2.35) C.

2.36) $x^{\left(\frac{3^n-1}{3^n}\right)}$.

2.37) $x^{\left(\frac{4^n-1}{4^n}\right)}$.

2.38) $x^{\left(\frac{6^n-1}{6^n}\right)}$.

2.39) $x^{\left(\frac{10^n-1}{10^n}\right)}$.

2.40) $x^{(x-1) \cdot x}$.

2.41) $x^{\left(\frac{9^n-1}{9^n}\right)}$.

2.42) B.

2.43) E.

2.44) 3.

2.45) 7.

2.46) 5.

2.47) 5.

2.48) $1 + \sqrt{1+a}$.

2.49) 6.

2.50) 46.

2.51) $n + a + x$.

2.52) 4.

2.53) $\frac{3}{4}$.

2.54) Demonstração.

2.55) 5.

2.56) 9.

2.57) 49.

2.58) 2.

2.59) $\frac{3}{8}$.

2.60) $\frac{\sqrt[6]{x}}{x}$.

2.61) $\frac{15\sqrt[15]{x^{11}}}{x}$.

2.62) 2.

2.63) 243.

2.64) $2017\sqrt[2017]{2017}$.

2.65) $\sqrt[9]{3}$.

2.66) 10.

2.67) 243

2.68) C.

2.69) 8.

2.70) 75.

4

2.71) 5^{25} .

5

2.72) 2^{16} .

$\frac{16\sqrt[16]{15}}{7}$

2.73) $7 \frac{16\sqrt[16]{15}}{7}$.

$\frac{5 \cdot \sqrt[3]{2}}{4}$

2.74) $2 \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2}}{4}$.

2.75) 7^7 .

2.76) 13^{13} .

Capítulo 03 – Racionalização

3.1) $\frac{c \cdot \sqrt[3]{b^3}}{b}$.

3.2) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}{6}$.

3.3) B.

3.4) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$.

3.5) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30}}{4}$.

3.6) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{9}$.

3.7) $\frac{5 + 2\sqrt{10}}{30}$.

3.8) $\frac{6(40\sqrt{2} - 9\sqrt{5} + 35\sqrt{7} - 12\sqrt{70})}{215}$.

3.9) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4}$.

3.10) $-2 - 2\sqrt{2}$.

3.11) $-3 - 2\sqrt{3}$.

3.12) $\sqrt{5} - 1$.

3.13) 2.

3.14) $\frac{1}{3}$.

3.15) $1 + \sqrt[4]{5}$.

3.16) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} + 3$.

3.17) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

3.18) A.

3.19) B.

3.20) C.

3.21) B.

3.22) E.

3.23) $2\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27}$.

3.24) 14.

3.25) $1 + \sqrt{2}$.

3.26) $2 - \sqrt{2}$.

3.27) $9 + 4\sqrt{5}$.

3.28) $\sqrt{3} - 1$.

3.29) $3 + 2\sqrt{2}$.

3.30) $5 - \sqrt{7}$.

3.31) $3 - \sqrt{7}$.

3.32) $\sqrt{6} - 2$.

3.33) $2 + \sqrt{5}$.

3.34) $1 + 2\sqrt{3}$.

3.35) $2\sqrt{5} - 3$.

3.36) $x = 3$.

3.37) $M = 2$.

3.38) 7.

3.39) B.

3.40) $-2\sqrt{7}$.

3.41) -10 .

3.42) -10 .

3.43) $6\sqrt{3} - 8$.

3.44) 10.

- 3.45) 4.
 3.46) B.
 3.47) A.
 3.48) A.
 3.49) D.
 3.50) B.
 3.51) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
 3.52) $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$.
 3.53) Demonstração.
 3.54) Demonstração.
 3.55) 1.
 3.56) E.
 3.57) 2.
 3.58) $\sqrt{5}$.
 3.59) B.
 3.60) $\sqrt{13}$.
 3.61) Demonstração.
 3.62) Demonstração.
 3.63) Demonstração.
 3.64) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
 3.65) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$.
 3.66) Demonstração.
 3.67) 936.
 3.68) $1 + \sqrt{3}$.
 3.69) $\sqrt{3} - 1$.
 3.70) $1 + \sqrt{2}$.
 3.71) 828.
 3.72) D.

**Capítulo 04 – Expressões
Algébricas**

- 4.1) $x^3 - 2x^2 - 6x + 27$.
 4.2) $3x\sqrt{xy}$.

Capítulo 05 – Produtos Notáveis

- 5.1) 711.
 5.2) 69.
 5.3) 5.
 5.4) $\frac{20}{3}$.
 5.5) C.
 5.6) 4.
 5.7) $(x^2 - n + 2)^2$.
 5.8) $x = 9$.
 5.9) B.
 5.10) $-\frac{7}{3}$.
 5.11) D.
 5.12) $\frac{1}{2}$.
 5.13) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
 5.14) 1.
 5.15) Demonstração.
 5.16) 23.
 5.17) $\frac{18}{7}$.
 5.18) $\frac{k^4 + 24k^2 + 16}{4k^3 + 16k}$.
 5.19) $(4x^2 - 1)(2x + 1)(2x - 1)$.
 5.20) 2100.
 5.21) $199 \cdot 197 \cdot 195 \cdot \dots \cdot 3$.
 5.22) 5 993 002.
 5.23) $a - b$.
 5.24) $a - b$.
 5.25) Demonstração.
 5.26) A.

5.27) A.

5.28) $4d^2$.5.29) $a^{18} - b^{18}$.

5.30) A.

5.31) -3 .

5.32) D.

5.33) B.

5.34) B.

5.35) $\frac{1}{a^2b^2}$.

5.36) C.

5.37) $(a+b)(a-b)^2$.

5.38) 3999.

5.39) $\frac{43}{63}$.5.40) $\frac{91}{136}$.5.41) $(a+b)^4 = k^2 + 4kx + 4x^2$ e

$$(a-b)^4 = k^2 - 4kx + 4x^2$$

5.42) $xy = \frac{1}{6}$.5.43) $\frac{k^4 + 24k^2 + 16}{4k^3 + 16k}$.5.44) $5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1$.

5.45) 992.

5.46) 20.

5.47) 41.

5.48) D.

5.49) C.

5.50) E.

5.51) $-\frac{123}{71}$.

5.52) D.

5.53) ± 123 .

5.54) 1

5.55) 116.

5.56) $\sqrt{2}$.

5.57) 5778.

5.58) Demonstração.

5.59) E.

5.60) C.

5.61) C.

5.62) 25.

5.63) A.

5.64) C.

5.65) 2525.

5.66) 123.

5.67) D.

5.68) D.

5.69) $-a^3 + 3ab - 3c$.

5.70) 753.

5.71) 4.

5.72) 5.

5.73) 4.

5.74) Demonstração.

5.75) $\frac{2414}{97}$.5.76) $\frac{a^{2^{n+1}} + a^{2^n}b^{2^n} + b^{2^{n+1}}}{a^2 + ab + b^2}$.

5.77)

a) 0. b) 0.

c) 1. d) $a+b+c$.

5.78) Demonstração.

5.79) Demonstração.

5.80)

a) 0. b) 0.

c) 0. d) 1.

5.81) Demonstração.

5.82) Demonstração.

5.83) $-\frac{2}{2a+b}$.

$$5.84) \frac{8ab^2}{(a^2 - b^2)^2}.$$

$$5.85) x.$$

$$5.86) D.$$

$$5.87) \text{ Demonstração.}$$

$$5.88) 0.$$

$$5.89) 0.$$

$$5.90) 373.$$

$$5.91) 313.$$

$$5.92) \begin{cases} 2, & \text{se } a+b+c \neq 0 \\ -1, & \text{se } a+b+c = 0 \end{cases}$$

$$5.93) 27.$$

$$5.94) -2.$$

$$5.95) 9.$$

$$5.96) \text{ Demonstração.}$$

$$5.97) \frac{1}{3}.$$

$$5.98) \text{ Demonstração.}$$

$$5.99) \frac{3}{7}.$$

$$5.100) 4 \ 030 \ 057.$$

$$5.101) 3.$$

$$5.102) 5778.$$

$$5.103) B.$$

$$5.104) 4.$$

$$5.105) A.$$

$$5.106) B.$$

$$5.107) 2.$$

$$5.108) \sqrt{5}.$$

$$5.109) E.$$

$$5.110) 4.$$

$$5.111) \text{ Demonstração.}$$

$$5.112) \text{ Demonstração.}$$

$$5.113) B.$$

$$5.114) \frac{6}{5}.$$

$$5.115) \frac{9[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]^2}{2}.$$

$$5.116) 1.$$

$$5.117) -5.$$

$$5.118) 3a^2b^2c^2 - 2(ab+bc+ca)^3.$$

$$5.119) \text{ Demonstração.}$$

$$5.120) \frac{7}{2}.$$

$$5.121) \frac{1}{6}.$$

$$5.122) \text{ Demonstração.}$$

$$5.123) \text{ Demonstração.}$$

$$5.124) \text{ Demonstração.}$$

$$5.125) \text{ Demonstração.}$$

Capítulo 06 – Fatoração

$$6.1) 28$$

$$6.2) (4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1).$$

$$6.3) E.$$

$$6.4) (5a - 3b)(x - y).$$

$$6.5) (x - y - a)(x - y + a).$$

$$6.6) (x - y)(8x - 3).$$

$$6.7) (4x^2y^3 - 9a^3b^2)(4x^2y^3 + 9a^3b^2)$$

$$6.8) (3a - 8)(a + 2)(5a^2 - 22a + 34)$$

$$6.9) 3.$$

$$6.10) \frac{81}{5}.$$

$$6.11) A.$$

$$6.12) B.$$

$$6.13) \frac{a}{b}.$$

$$6.14) 0.$$

6.15) $(ay + bx)(ab + xy)$.

6.16) $(a-4)(a-2)(a+b)^2$.

6.17) $(a+b)^2(c+d)$.

6.18) $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

6.19) $(a-4b-5c)(a-4b+3c)$.

6.20) $(a^2 + b - 2c^2)(a^2 - 2b + c^2)$.

6.21) $(2a^2 + 3b^2 - 2)(a^2 + 7b^2 + 5)$.

6.22) $\frac{a-b}{a+b-c}$.

6.23) $\frac{a+b-c}{a-b+c}$.

6.24) $(a+b)(a+c)(b+c)$.

6.25) $\frac{a^3(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)^2}$.

6.26) $\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$.

6.27) $2a^2b^2 - a - b$.

6.28) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a}$.

6.29) $1 - \frac{4ab}{a^2 + b^2}$.

6.30) Demonstração.

6.31) D.

6.32)

$(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c) \cdot (-a+b+c)$.

6.33)

$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c) \cdot (-a+b+c)$.

6.34) 104.

6.35) $(y^2 - 2y)(y^2 - 4y + 2)$.

6.36) A.

6.37) A.

6.38) B.

6.39) $\frac{20}{3}$.

6.40) -34.

6.41) Demonstração.

6.42)

a) 0.

b) 0.

c) 1.

d) $a+b+c$.

6.43) 30.

6.44) 0.

6.45) 1.

6.46) 0.

6.47) 0.

6.48)

a) 0.

b) 0.

c) 0.

d) 1.

6.49) 10.

6.50) $a^2 + ab + b^2$.

6.51) Demonstração.

6.52) Demonstração.

6.53) $(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab)$.

6.54) $\frac{3}{4}$.

6.55) $\frac{3}{4}$.

6.56) Demonstração.

6.57) Demonstração.

6.58) Demonstração.

6.59) $(x-1)(x^2 - 5x - 5)$.

6.60) $(x+2)(x^2 + 2x - 5)$.

6.61) $(x-1)(x+1)(x+4)$.

6.62) $(x+4)(x^2+1)$.

6.63) $(3x-2)(x+1)(x+2)$.

6.64) $(x+1)(x-2)(x+3)$.

6.65) $(x-1)(2x+1)(x+5)$.

6.66) $(2x-3)(2x-1)(x-4)$.

6.67) $(x+1)(x+2)(x+3)$.

6.68) $(x+3)(4x^2-20x-3)$.

6.69) $(2x-3)^2(2x+5)$.

6.70) $(x-2)(x^2-2)$.

6.71) $(x-2)(x-1)(x+1)$.

6.72) $(6x+1)(x^2+x+2)$.

6.73) $(x-1)(x^2+4x+7)$.

6.74) $(x-1)(x^2+2x+2)$.

6.75) $(x+1)(x-3)(x+6)$.

6.76) Demonstração.

6.77) $(2x-3y+5)(x+y-5)$.

6.78) $(1-x-2y)(3x+y+5)$.

6.79) $(2x+y-2)(4x+3y-3)$.

6.80) $(x+y-4)(x+y+1)$.

6.81) $(2x-3y+8)(2x+5y-12)$.

6.82) $(5x-2y+1)(2x+y-7)$.

6.83) $(x-8y-6)(3x+2y+1)$.

6.84) $(x-3y+5)(7x-y+6)$.

6.85) $(7x+y-1)(x+3y+2)$.

6.86) $(-x+1)(3x+y-2)$.

6.87) $(2x+3y+3)(9x+8y)$.

6.88) $(x^2-4x+1)(x^2+4x+15)$.

6.89) $(x^2-n+2)^2$.

6.90) $(x^2+7)(x^2+3x-2)$.

6.91) $(x^2-3x+1)(x^2-x+1)$.

6.92) $(x^2-3)(x^2+2x-5)$.

6.93) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+5)$.

6.94) $(n^2-n+1)(n^2+5n+7)$.

6.95) $(x^2-5x+2)(x^2-2x+2)$.

6.96) $(x^2-7x+3)(x^2-x+3)$.

6.97) $(n^2+1)(n^2+2n-21)$.

6.98) $x(x-1)(x-2)(x-4)$.

6.99) $(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$.

6.100) $(x^2-2x+5)(x^2+2x+5)$.

6.101) $(x^2-2x+5)(3x^2+6x+1)$.

6.102) $(x^2-2x+5)(x^2-4x+13)$.

6.103) $(x^2-2)(x^2-x-3)$.

6.104) $x = -2, x = -1, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{2}{3}$.

6.105) $(3x+1)(2x-1)(x^2+3)$.

6.106) $(x+1)(x-2)(x^2-3)$.

6.107) $(x-2)^2(x-1)^2$.

6.108) $(x^2-3x+4)(3x^2+x-6)$.

$$6.109) (5x-2)(x+3)(3x^2+x+1)$$

$$6.110) (x-2)(x+3)(x+4)(x-5).$$

$$6.111)$$

$$(x^{2n}+1)(x^{4n}-x^{2n}+1)(x^{6n}-x^{3n}+1).$$

$$6.112) (x^2+1)(x^2+x+1).$$

$$6.113)$$

$$(x+n)(x-3n)(x^2-3nx+n^2).$$

$$6.114)$$

$$(x+n)(x-3n)(2x^2+nx+n^2).$$

$$6.115) (x-2)^3(2x+3).$$

$$6.116) (x^2+1)(2x^2-x+1).$$

$$6.117) (x+1)^2(x^2+1).$$

$$6.118) (x-1)(x+2)(x-3)(x+4).$$

$$6.119) (2x+7)(x+1)(x+3)(x-5).$$

$$6.120) (4x+1)(x^2+9)(x-6).$$

$$6.121) (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$$

$$6.122) (x-2)(x-1)(x+2)(x^2+2).$$

$$6.123) x^2(x-3)(x-1)(x+1)(x+2)^2.$$

$$6.124) (x+1)(x^2+1)(x^2-2).$$

$$6.125) (a-1)(a+1)^2(a^2+4a+7).$$

$$6.126) (1-x)(x^2+1)(x^2+x+1).$$

$$6.127) (x-2)(x-6)(x+12)(x^2+x+1).$$

$$6.128) (x+2)(x^2-2x-1)(x^2+x+1)$$

$$6.129) (3x-2)(2x+1)(x-1)(2x-2x-1).$$

$$6.130) (x+1)(x^2-x+1)(3x^2+5x+3).$$

$$6.131) (x-1)(x+1)^2(x+2)^2.$$

$$6.132) (x-2)^3(x^2+4).$$

$$6.133) (x-2)(x+2)^4.$$

$$6.134) (x-2y+z+5)(x+2y+2z+1)$$

$$6.135) (2x-3y+z+3)(x-y+5z-3).$$

$$6.136) (x-y-z+4)(-2x-y+2z+1).$$

$$6.137) (x+y+2z+2)(2x-2y+z+1).$$

$$6.138) (3x+5y-z+2)(x+2y+3z+1).$$

**Capítulo 07 – Polinômios
Simétricos**

$$7.1) 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

$$7.2) C.$$

$$7.3) \text{ Demonstração.}$$

$$7.4) 1.$$

$$7.5) \text{ Demonstração.}$$

$$7.6) \text{ Demonstração.}$$

$$7.7) (x+y)(x+z)(y+z).$$

$$7.8) (x+y+z)(xy+xz+yz).$$

$$7.9) (x+y)(x+z)(y+z).$$

$$7.10) 3(x+2y-3z)(y+2z-3x).$$

$$\cdot (z+2x-3y)$$

$$7.11) (a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c).$$

$$7.12) (a-b)(a-c)(b-c).$$

$$\cdot (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc).$$

$$7.13) (a-b)(c-a)(b-c) \cdot$$

$$\left(\sum_{\text{sim}} a^3 + \sum_{\text{sim}} a^2b + abc \right).$$

$$7.14) (a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c).$$

$$7.15) (a-b)(c-a)(b-c) \cdot$$

$$\left(\sum_{\text{sim}} a^3 + \sum_{\text{sim}} a^2b - 9abc \right).$$

$$7.16) (a-b)(c-a)(b-c)(ab+bc+ac)$$

$$7.17) (a-b)(c-a)(b-c) \cdot$$

$$\left(\sum_{\text{sim}} a^3b + \sum_{\text{sim}} a^2b^2 - 3 \sum_{\text{sim}} a^2bc \right).$$

$$7.18) (x-y)(x-z)(y-z).$$

$$7.19)$$

$$7ab \left(\sum_{\text{sim}} a^5 + 3 \sum_{\text{sim}} a^4b + 5 \sum_{\text{sim}} a^3b^2 \right).$$

$$7.20) (a+b)(a+c)(b+c) \cdot$$

$$(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$$

$$7.21) \text{ Demonstração.}$$

$$7.22) \sum_{\text{sim}} a^3b^3 - \sum_{\text{sim}} a^4bc.$$

$$7.23) 7(a+b)(a+c)(b+c) \cdot$$

$$\left[\left(\sum_{\text{sim}} a^2 + \sum_{\text{sim}} ab \right)^2 + abc(a+b+c) \right].$$

$$7.24) 24xyz.$$

$$7.25) 80xyz(x^2+y^2+z^2).$$

Capítulo 08 – Somas de Newton

$$8.1) 1.$$

$$8.2) \pm 123.$$

$$8.3) 2.$$

$$8.4) a^6 - 6a^2b + 7a^2b^2 + 2a^2b^3 - a^4b - 2b^4$$

$$8.5) 2525.$$

$$8.6) 6621.$$

$$8.7) \text{ Demonstração.}$$

$$8.8) \text{ Demonstração.}$$

$$8.9) \text{ Demonstração.}$$

$$8.10) \text{ Demonstração.}$$

$$8.11) \text{ Demonstração.}$$

$$8.12) -\frac{5}{3}.$$

$$8.13) \text{ Demonstração.}$$

$$8.14) \frac{6}{5}.$$

$$8.15) \text{ Demonstração.}$$

$$8.16) \text{ Demonstração.}$$

$$8.17) \text{ Demonstração.}$$

$$8.18) \text{ Demonstração.}$$

$$8.19) \frac{7}{2}.$$

$$8.20) \text{ Demonstração.}$$

$$8.21) \text{ Demonstração.}$$

$$8.22) \text{ Demonstração.}$$

$$8.23) \text{ Demonstração.}$$

$$8.24) \text{ Demonstração.}$$

$$8.25) \text{ Demonstração.}$$

$$8.26) \text{ Demonstração.}$$

$$8.27) \text{ Demonstração.}$$

$$8.28) \text{ Demonstração.}$$

$$8.29) \text{ Demonstração.}$$

$$8.30) \text{ Demonstração.}$$

$$8.31) \text{ Demonstração.}$$

8.32) Demonstração.

8.33) Demonstração.

8.34) Demonstração.

8.35) Demonstração.

8.36) Demonstração.

8.37) Demonstração.

8.38) Demonstração.

8.39) Demonstração.

8.40) Demonstração.

8.41) 992.

8.42) 20.

8.43) B.

8.44) 9.

8.45) 4.

8.46) $-a^3 + 3ab - 3c$.

8.47) $-\frac{7}{3}$.

8.48) 11.

8.49) 186.

8.50) 753.

8.51) D.

8.52) B.

8.53) 25.

8.54) 4 030 057.

8.55) 3.

8.56) -353.

8.57) 4.

8.58) 4.

8.59) Demonstração.

8.60) 123.

8.61) D.

8.62) Demonstração.

Capítulo 10 - Resoluções

Capítulo 01 – Potenciação

Questão 1.1 (AHSME-1952) - Resposta: Alternativa C

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{2^{n+4} - 2 \cdot (2^n)}{2 \cdot (2^{n+3})} \Rightarrow E = \frac{2^n \cdot 2^4 - 2 \cdot (2^n)}{2 \cdot (2^n \cdot 2^3)} \Rightarrow E = \frac{2^n \cdot (2^4 - 2)}{2^n \cdot 2^4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2^4 - 2}{2^4} \Rightarrow E = \frac{16 - 2}{16} \Rightarrow E = \frac{14}{16} \therefore \frac{2^{n+4} - 2 \cdot (2^n)}{2 \cdot (2^{n+3})} = \frac{7}{8}.$$

Questão 1.2

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \left(\left((2^a)^{2b} \right)^{2c} \right)^{2d} \Rightarrow E = 2^{a \cdot 2b \cdot 2c \cdot 2d} \Rightarrow E = 2^{8abcd} \Rightarrow E = (2^8)^{abcd}$$

$$\therefore \left(\left((2^a)^{2b} \right)^{2c} \right)^{2d} = 256^{abcd}.$$

Questão 1.3

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \left(2^{2a^2} \cdot 3^{2b^2} \cdot 7^{2c^2} \right)^{m \cdot n} \Rightarrow E = 2^{2a^2 \cdot m \cdot n} \cdot 3^{2b^2 \cdot m \cdot n} \cdot 7^{2c^2 \cdot m \cdot n}$$

$$\Rightarrow E = (2^2)^{a^2 \cdot m \cdot n} \cdot (3^2)^{b^2 \cdot m \cdot n} \cdot (7^2)^{c^2 \cdot m \cdot n}$$

$$\therefore \left(2^{2a^2} \cdot 3^{2b^2} \cdot 7^{2c^2} \right)^{m \cdot n} = 4^{a^2 \cdot m \cdot n} \cdot 9^{b^2 \cdot m \cdot n} \cdot 49^{c^2 \cdot m \cdot n}.$$

Questão 1.4 (AHSME-1971) - Resposta: Alternativa C

Resolução: Seja $x = -2k$ e chamando a expressão de E, então:

$$2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k} = 2^{-2k-1} - 2^{-2k+1} + 2^{-2k}$$

$$\Rightarrow E = 2^{x-1} - 2^{x+1} + 2^x \Rightarrow E = \frac{2^x}{2} - 2^x \cdot 2 + 2^x \Rightarrow E = 2^x \left(\frac{1}{2} - 2 + 1 \right)$$

$$\Rightarrow E = 2^x \left(-\frac{1}{2} \right) \Rightarrow E = -2^x \cdot 2^{-1} \Rightarrow E = -2^{x-1}$$

$$\therefore 2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k} = -2^{-(2k+1)}$$

Questão 1.5

Resolução: Chamando a expressão de E, então:

$$E = \frac{10^4 \cdot 15^{16} \cdot 33^{11} \cdot 77^{17} \cdot 84^{13}}{5^{20} \cdot 14^{30} \cdot 30^{40} \cdot 11^{28}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(2 \cdot 5)^4 \cdot (3 \cdot 5)^{16} \cdot (3 \cdot 11)^{11} \cdot (7 \cdot 11)^{17} \cdot (4 \cdot 3 \cdot 7)^{13}}{5^{20} \cdot (2 \cdot 7)^{30} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^{40} \cdot 11^{28}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\overline{2^4} \cdot \overline{5^4} \cdot \overline{3^{16}} \cdot \overline{5^{16}} \cdot \overline{3^{11}} \cdot \overline{11^{11}} \cdot \overline{7^{17}} \cdot \overline{11^{17}} \cdot \overline{4^{13}} \cdot \overline{3^{13}} \cdot \overline{7^{13}}}{\overline{5^{20}} \cdot \overline{2^{30}} \cdot \overline{7^{30}} \cdot \overline{2^{40}} \cdot \overline{3^{40}} \cdot \overline{5^{40}} \cdot \overline{11^{28}}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2^{4+26} \cdot 3^{16+11+13} \cdot 5^{4+16} \cdot 7^{17+13} \cdot 11^{11+17}}{2^{30} \cdot 2^{40} \cdot 3^{40} \cdot 5^{20} \cdot 5^{40} \cdot 7^{30} \cdot 11^{28}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{2^{30}} \cdot \cancel{3^{40}} \cdot \cancel{5^{20}} \cdot \cancel{7^{30}} \cdot \cancel{11^{28}}}{\cancel{2^{30}} \cdot 2^{40} \cdot \cancel{3^{40}} \cdot \cancel{5^{20}} \cdot 5^{40} \cdot \cancel{7^{30}} \cdot \cancel{11^{28}}} \Rightarrow E = \frac{1}{2^{40} \cdot 5^{40}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{(2 \cdot 5)^{40}} \Rightarrow E = \frac{1}{10^{40}} \therefore \frac{10^4 \cdot 15^{16} \cdot 33^{11} \cdot 77^{17} \cdot 84^{13}}{5^{20} \cdot 14^{30} \cdot 30^{40} \cdot 11^{28}} = 10^{-40}$$

Questão 1.6

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{5^{n-1} + 2^{n-1}}{5^{1-n} + 2^{1-n}} \Rightarrow E = \frac{\frac{5^n}{5} + \frac{2^n}{2}}{\frac{5^n}{5} + \frac{2^n}{2}} \Rightarrow E = \frac{\frac{2 \cdot 5^n + 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 5}}{\frac{5 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}{2^n \cdot 5^n}}$$

$$E = \frac{5^{n-1} + 2^{n-1}}{5^{1-n} + 2^{1-n}} \Rightarrow E = \frac{\frac{5^n}{5} + \frac{2^n}{2}}{\frac{5^n}{5} + \frac{2^n}{2}} \Rightarrow E = \frac{\frac{2 \cdot 5^n + 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 5}}{\frac{5 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}{2^n \cdot 5^n}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2 \cdot 5^n + 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 5} \cdot \frac{2^n \cdot 5^n}{5 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n} \Rightarrow E = \frac{2^n \cdot 5^n}{2 \cdot 5} \Rightarrow E = 2^{n-1} \cdot 5^{n-1}$$

$$\Rightarrow E = (2 \cdot 5)^{n-1} \therefore \frac{5^{n-1} + 2^{n-1}}{5^{1-n} + 2^{1-n}} = 10^{n-1}.$$

Questão 1.7

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{x^{n^k+2} - x^{n^k+1} + x^{n^k}}{x^{n^k-2} - x^{n^k-1} + x^{n^k}} \Rightarrow E = \frac{x^{n^k}(x^2 - x + 1)}{x^{n^k}(x^{-2} - x^{-1} + 1)} \Rightarrow E = \frac{(x^2 - x + 1)}{(x^{-2} - x^{-1} + 1)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(x^2 - x + 1)}{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)} \Rightarrow E = \frac{(x^2 - x + 1)}{\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)} \Rightarrow E = (x^2 - x + 1) \cdot \left(\frac{x^2}{1-x+x^2}\right)$$

$$\therefore \frac{x^{n^k+2} - x^{n^k+1} + x^{n^k}}{x^{n^k-2} - x^{n^k-1} + x^{n^k}} = x^2.$$

Questão 1.8

$$E = \overbrace{x^{n^k} + x^{n^k} + \dots + x^{n^k}}^{x^{n^k} \text{ vezes}} \cdot \overbrace{x^n + x^n + \dots + x^n}^{x^n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{x^k + x^k + \dots + x^k}^{x^k \text{ vezes}}$$

$$E = x^{n^k} \cdot x^{n^k} \cdot x^n \cdot x^n \cdot x^k \cdot x^k = x^{2n^k} \cdot x^{2n} \cdot x^{2k} = x^{2n^k+2n+2k}$$

$$\Rightarrow E = x^{2(n^k+n+k)} \therefore E = (x^2)^{n^k+n+k}.$$

Questão 1.9

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \overbrace{a^b + a^b + \dots + a^b}^{b^a \text{ vezes}} \cdot \overbrace{b^b + b^b + \dots + b^b}^{a^a \text{ vezes}} \Rightarrow E = a^b \cdot b^b \cdot a^b \cdot a^a \Rightarrow E = a^{a-b} \cdot b^{a+b}$$

$$\therefore \overbrace{a^b + a^b + \dots + a^b}^{b^a \text{ vezes}} \cdot \overbrace{b^b + b^b + \dots + b^b}^{a^a \text{ vezes}} = (ab)^{a+b}.$$

Questão 1.10

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \overbrace{a^b \cdot a^b \cdot \dots \cdot a^b}^{b^a \text{ vezes}} \cdot \overbrace{b^a \cdot b^a \cdot \dots \cdot b^a}^{b^b \text{ vezes}} \Rightarrow E = a^b \cdot b^a \cdot b^a \cdot b^a \therefore E = a^{b^{(a-1)}} \cdot b^{a^{(b-1)}}.$$

Questão 1.11 (Harvard-MIT-2012)

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 4^{4^4} &= {}^{128}\sqrt{2^{2^{2^n}}} \Rightarrow (2^2)^{(2^2)^4} = \frac{2^{2^n}}{2^{128}} \Rightarrow 2^{2(2^4)} = 2^{\left(\frac{2^{2^n}}{2^7}\right)} \\
 &\Rightarrow 2^2 \cdot 2^8 = 2^{2^{n-7}} \Rightarrow 2^{2^9} = 2^{2^{n-7}} \Rightarrow 2^n - 7 = 9 \Rightarrow 2^n = 16 \\
 &\Rightarrow 2^n = 2^4 \therefore n = 4.
 \end{aligned}$$

Questão 1.12

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned}
 &\text{"2016" vezes} \\
 E &= \left[\left(\left(2^{3^5} \right)^{3^5} \right)^{3^5} \right] \Rightarrow E = 2^{(3^5)^{2016}} \Rightarrow E = 2^{3^{5 \cdot 2016}} \therefore E = 2^{3^{10080}}.
 \end{aligned}$$

Questão 1.13

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 &\text{x vezes} \qquad \qquad \qquad \text{x vezes} \\
 x^x \cdot x^x \cdot \dots \cdot x^x &= x^{(x)^x} \therefore x^x \cdot x^x \cdot \dots \cdot x^x = x^{x^x}.
 \end{aligned}$$

Questão 1.14

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 &\text{x vezes} \\
 E &= \left(x^x \cdot \left(x^x \cdot \dots \cdot \left(x^x \right)^x \right)^x \right)^x \Rightarrow E = x^{x \cdot \left(\frac{x^{x+1} - x}{x-1} \right)} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{x^{x+1+1} - x^{1+1}}{x-1} \right)} \\
 \therefore E &= x^{\left(\frac{x^{x+2} - x^2}{x-1} \right)}.
 \end{aligned}$$

Questão 1.15

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned}
 &\text{"50" vezes} \qquad \qquad \qquad \text{"50" vezes} \qquad \qquad \qquad \text{"50" vezes} \\
 E &= a^3 b^4 \cdot a^3 b^4 \cdot \dots \cdot a^3 b^4 \Rightarrow E = a^3 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot b^4 \cdot \dots \cdot b^4
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = a^{(3)^{50}} \cdot b^{(4)^{50}} \quad \therefore \overbrace{a^3 b^4 \cdot a^3 b^4 \cdot \dots \cdot a^3 b^4}^{\text{"50" vezes}} = a^{3^{50}} \cdot b^{4^{50}}$$

Questão 1.16

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \overbrace{a^3 b^4 c^5 \cdot a^3 b^4 c^5 \cdot \dots \cdot a^3 b^4 c^5}^{\text{"100" vezes}}$$

$$\Rightarrow E = \overbrace{a^3 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^3}^{\text{"100" vezes}} \cdot \overbrace{b^4 \cdot b^4 \cdot \dots \cdot b^4}^{\text{"100" vezes}} \cdot \overbrace{c^5 \cdot c^5 \cdot \dots \cdot c^5}^{\text{"100" vezes}}$$

$$\Rightarrow E = a^{(3)^{100}} \cdot b^{(4)^{100}} \cdot c^{(5)^{100}}$$

$$\therefore \overbrace{a^3 b^4 c^5 \cdot a^3 b^4 c^5 \cdot \dots \cdot a^3 b^4 c^5}^{100 \text{ vezes}} = a^{3^{100}} \cdot b^{4^{100}} \cdot c^{5^{100}}$$

Questão 1.17

Sugestão: Use $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = x \cdot (x^2)^2 \cdot (x^3)^3 \cdot (x^4)^4 \cdot \dots \cdot (x^n)^n \Rightarrow E = x \cdot x^{2 \cdot 2} \cdot x^{3 \cdot 3} \cdot x^{4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot x^{n \cdot n}$$

$$\Rightarrow E = x^{1^2} \cdot x^{2^2} \cdot x^{3^2} \cdot x^{4^2} \cdot \dots \cdot x^{n^2} \Rightarrow E = x^{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}$$

$$\therefore x \cdot (x^2)^2 \cdot (x^3)^3 \cdot (x^4)^4 \cdot \dots \cdot (x^n)^n = x^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Questão 1.18

Sugestão: Use $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = x^2 \cdot (x^2)^3 \cdot (x^3)^4 \cdot (x^4)^5 \cdot \dots \cdot (x^n)^{n+1}$$

$$\Rightarrow E = x^{1 \cdot 2} \cdot x^{2 \cdot 3} \cdot x^{3 \cdot 4} \cdot \dots \cdot x^{n \cdot (n+1)} \Rightarrow E = x^{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1)}$$

$$\therefore x^2 \cdot (x^2)^3 \cdot (x^3)^4 \cdot (x^4)^5 \cdot \dots \cdot (x^n)^{n+1} = x^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

Questão 1.19

Sugestão: Use $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = x \cdot \left((x^2)^2 \right)^2 \cdot \left((x^3)^3 \right)^3 \cdot \left((x^4)^4 \right)^4 \cdot \dots \cdot \left((x^n)^n \right)^n$$

$$E = x \cdot x^{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot x^{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot x^{4 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot x^{n \cdot n \cdot n}$$

$$E = x^{1^3} \cdot x^{2^3} \cdot x^{3^3} \cdot x^{4^3} \cdot \dots \cdot x^{n^3} = x^{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3}$$

$$\therefore x \cdot \left((x^2)^2 \right)^2 \cdot \left((x^3)^3 \right)^3 \cdot \left((x^4)^4 \right)^4 \cdot \dots \cdot \left((x^n)^n \right)^n = x^{\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2}$$

Questão 1.20

Sugestão: Use

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = (x^2)^3 \cdot \left((x^2)^3 \right)^4 \cdot \left((x^3)^4 \right)^5 \cdot \dots \cdot \left((x^n)^{n+1} \right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow E = x^{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \dots \cdot x^{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$\Rightarrow E = x^{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$\therefore (x^2)^3 \cdot \left((x^2)^3 \right)^4 \cdot \left((x^3)^4 \right)^5 \cdot \dots \cdot \left((x^n)^{n+1} \right)^{n+2} = x^{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

Questão 1.21

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{a^{\frac{2}{1}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^4 \cdot b^2} \Rightarrow E = a^{\frac{2}{1} - 4} \cdot b^{\frac{1}{3} - 2} \Rightarrow E = a^{\frac{8}{12} - 4} \cdot b^{\frac{1}{3} - 2} \Rightarrow E = a^{12} \cdot b^{-1}$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{5}{12}}}{b}.$$

Questão 1.22

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \left(\frac{2a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{2a^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \right) \Rightarrow E = \frac{4a^{\frac{3}{4} - \frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}} \Rightarrow E = \frac{4a^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{6}}} \Rightarrow E = \frac{4a^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{6}}}$$

$$\therefore \left(\frac{2a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{2a^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \right) = 4 \cdot a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{5}{6}}.$$

Questão 1.23 (AHSME-1954)

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{1}{16} \cdot a^0 + \left(\frac{1}{16} \right)^0 - \left(64^{-\frac{1}{2}} \right) - (32)^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow E = \frac{1}{16} + 1 - (2^6)^{-\frac{1}{2}} - (2^5)^{-\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{16} + 1 - (2^{-3}) - (2^{-4}) \Rightarrow E = 1 - \frac{1}{8} \Rightarrow E = \frac{8-1}{8} \therefore E = \frac{7}{8}.$$

Questão 1.24 (AHSME-1971)

Resolução: Podemos escrever:

$$S = \left(1 + 2^{-\frac{1}{32}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{16}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{8}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{4}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$S = \frac{\left(1 - 2^{-\frac{1}{32}} \right)}{\left(1 - 2^{-\frac{1}{32}} \right)} \cdot \left(1 + 2^{-\frac{1}{32}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{16}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{8}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{4}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1-2^{-1}}{\left(1-2^{-\frac{1}{32}}\right)} \Rightarrow S = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(1-2^{-\frac{1}{32}}\right)} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-2^{-\frac{1}{32}}\right)}$$

$$\therefore \left(1+2^{-\frac{1}{32}}\right) \left(1+2^{-\frac{1}{16}}\right) \left(1+2^{-\frac{1}{8}}\right) \left(1+2^{-\frac{1}{4}}\right) \left(1+2^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1-2^{-\frac{1}{32}}\right)^{-1}.$$

Questão 1.25

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (-a^2)^3 \cdot (-a^{-3})^2 \cdot (a^{3^2}) \cdot (a^{-3^2}) \cdot (-a^{(-3)^2})$$

$$\Rightarrow E = (-a^6) \cdot a^{-6} \cdot a^{3^2} \cdot a^{-3^2} \cdot (-a^{3^2}) \Rightarrow E = a^{6-6+3^2-3^2+3^2}$$

$$\Rightarrow E = a^{3^2} \therefore (-a^2)^3 \cdot (-a^{-3})^2 \cdot (a^{3^2}) \cdot (a^{-3^2}) \cdot (-a^{(-3)^2}) = a^9.$$

Questão 1.26

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \left\{ \frac{\left[\left(m^{\frac{m+1}{m}} + m^{\frac{m-1}{m}} \right)^m \right]^{\frac{m}{m^2-1}}}{m^{m-1} \left(m^{\frac{2}{m}} + 1 \right)^{\frac{1}{m}}} \right\}^m \Rightarrow E = \left\{ \frac{\left[\left(m^{\frac{m+1}{m}} + m^{\frac{m-1}{m}} \right)^m \right]^{\frac{m}{m^2-1}}}{\left[\left(m^{\frac{m-1}{m} + \frac{2}{m}} + m^{\frac{m-1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^m} \right\}^m$$

$$E = \left\{ \left[\left(m^{\frac{m+1}{m}} + m^{\frac{m-1}{m}} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]^{\frac{m}{m^2-1}} \right\}^m \Rightarrow E = \left\{ \left[\left(m^{\frac{m+1}{m}} + m^{\frac{m-1}{m}} \right)^{\frac{m^2-1}{m}} \right]^{\frac{m}{m^2-1}} \right\}^m$$

$$\Rightarrow E = \left(m^{\frac{m+1}{m}} + m^{\frac{m-1}{m}} \right)^m \Rightarrow E = m^{m+1} + m^{m-1} \Rightarrow E = m^{m-1} (m^2 + 1).$$

Questão 1.27

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{a^{n^2}}{\left(\frac{b^{n^3}}{c^{n^4}}\right)} \Rightarrow E = a^{+n^2} \cdot b^{-n^3} \cdot c^{+n^4}.$$

Questão 1.28

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{a^n}{\left(\frac{a^{-2n}}{a^{3n}} \cdot \frac{a^{4n}}{a^{5n}} \cdot \dots \cdot \frac{a^{(n+1)n^2}}{a^{(-1)^n n^2}}\right)} \Rightarrow E = a^{+n} \cdot a^{-(-2n)} \cdot a^{+3n} \cdot a^{-(-4n)} \cdot \dots \cdot a^{-[(-1)^n n^2]}$$

$$\Rightarrow E = a^n \cdot a^{2n} \cdot a^{3n} \cdot a^{4n} \cdot \dots \cdot a^{n^2} \Rightarrow E = a^{n+2n+3n+\dots+n^2}$$

$$\Rightarrow E = a^{\frac{(n+n^2)n}{2}} \therefore E = a^{\frac{n^2+n^3}{2}}.$$

Questão 1.29

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{a^n}{\left(\frac{a^{-n^2}}{a^{n^3}} \cdot \frac{a^{n^4}}{a^{n^5}} \cdot \dots \cdot \frac{a^{(-n)^n}}{a^{(-n)^n}}\right)} \Rightarrow E = a^{+n} \cdot a^{-(-n^2)} \cdot a^{+n^3} \cdot a^{-(-n^4)} \cdot \dots \cdot a^{-[(-n)^n]}$$

$$\Rightarrow E = a^n \cdot a^{n^2} \cdot a^{n^3} \cdot a^{n^4} \cdot \dots \cdot a^{n^n} \Rightarrow E = a^{n+n^2+n^3+\dots+n^n}$$

$$\Rightarrow E = a^{\frac{n(n^n-1)}{n-1}} \quad \therefore E = a^{\frac{n^{n+1}-n}{n-1}}$$

Capítulo 02 – Radiciação

Questão 2.1 (CN-1964)

Resolução 01: Colocando todos os radicais no mesmo índice, ou seja, tirando o mmc de todos os índices, temos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt[4]{a} \div \sqrt[8]{a}}{\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}} \Rightarrow E = \frac{\frac{\sqrt[72]{a^{18}} \div \sqrt[72]{a^9}}{\sqrt[72]{a^{12}}}}{\frac{\sqrt[72]{a^{24}} \cdot \sqrt[72]{a^8}}{\sqrt[72]{a^{36}}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[72]{a^{18-12}} \div \sqrt[72]{a^9}}{\frac{\sqrt[72]{a^{24+8}}}{\sqrt[72]{a^{36}}}} \\ \Rightarrow E &= \frac{\sqrt[72]{a^6} \div \sqrt[72]{a^9}}{\frac{\sqrt[72]{a^{32}}}{\sqrt[72]{a^{36}}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[72]{a^{6-9}}}{\sqrt[72]{a^{32-36}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[72]{a^{-3}}}{\sqrt[72]{a^{-4}}} \\ \Rightarrow E &= \sqrt[72]{a^{-3-(-4)}} \Rightarrow E = \sqrt[72]{a^{-3+4}} \quad \therefore E = \sqrt[72]{a} \end{aligned}$$

Resolução 02: Colocando os radicais no mesmo índice e simplificando cada operação, temos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt[4]{a} \div \sqrt[8]{a}}{\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}} \Rightarrow E = \frac{\frac{\sqrt[12]{a^3} \div \sqrt[12]{a^2}}{\frac{\sqrt[9]{a^3} \cdot \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}}}{\frac{\sqrt[9]{a^4}}{\sqrt{a}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[24]{a^2} \div \sqrt[24]{a^3}}{\frac{18\sqrt{(a^4)^2}}{18\sqrt[9]{a^9}}} \\ \Rightarrow E &= \frac{\sqrt[24]{a^2} \div \sqrt[24]{a^3}}{\frac{18\sqrt{(a^4)^2}}{18\sqrt[9]{a^9}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[24]{a^{2-3}}}{\sqrt[18]{a^{8-9}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[24]{a^{-1}}}{\sqrt[18]{a^{-1}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[72]{a^{-3}}}{\sqrt[72]{a^{-4}}} \\ \Rightarrow E &= \sqrt[72]{a^{-3-(-4)}} \Rightarrow E = \sqrt[72]{a^{-3+4}} \quad \therefore E = \sqrt[72]{a} \end{aligned}$$

Questão 2.2 (CN-2000) - Resposta: Alternativa A

Resolução: Tirando os valores de x , y e z , temos:

$$\sqrt[3]{x^2} = 1999^6 \Rightarrow x^2 = (1999^6)^3 \Rightarrow x = \sqrt{1999^{18}} \Rightarrow x = 1999^9.$$

$$\sqrt{y} = 1999^4 \Rightarrow y = (1999^4)^2 \Rightarrow y = 1999^8.$$

$$\sqrt[5]{z^4} = 1999^8 \Rightarrow z^4 = (1999^8)^5 \Rightarrow z = \sqrt[4]{1999^{40}} \Rightarrow z = 1999^{10}.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}(xyz)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} = \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} = \sqrt[3]{1999^9 \cdot 1999^8 \cdot 1999^{10}} \\ \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} &= \sqrt[3]{1999^{9+8+10}} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} = \sqrt[3]{1999^{27}} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} = 1999^9.\end{aligned}$$

Questão 2.3 (AHSME-1956) - Resposta: Alternativa D

Resolução 01: Simplificando os índices com o expoente, temos:

$$\begin{aligned}E &= \left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}} \right]^4 \cdot \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}} \right]^4 \Rightarrow E = \left[\sqrt[3]{(\sqrt{a})^3} \right]^4 \cdot \left[\sqrt[6]{a^3} \right]^4 \\ \Rightarrow E &= (\sqrt{a})^4 \cdot (\sqrt{a})^4 \Rightarrow E = a^2 \cdot a^2 \therefore \left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}} \right]^4 \cdot \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}} \right]^4 = a^4.\end{aligned}$$

Resolução 02: Efetuando a multiplicação dos índices e simplificando, temos:

$$\begin{aligned}E &= \left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}} \right]^4 \cdot \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}} \right]^4 \Rightarrow E = \left(\sqrt[18]{a^9} \right)^4 \cdot \left(\sqrt[18]{a^9} \right)^4 \Rightarrow \\ E &= \sqrt[18]{a^{36}} \cdot \sqrt[18]{a^{36}} \Rightarrow E = a^2 \cdot a^2 \therefore \left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}} \right]^4 \cdot \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}} \right]^4 = a^4.\end{aligned}$$

Questão 2.4 (AHSME-1998) - Resposta: Alternativa D

Resolução: Elevando a expressão ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}E &= \sqrt[3]{N} \sqrt[3]{N} \sqrt[3]{N} \Rightarrow E = \sqrt[3]{N \sqrt[3]{N} \cdot N^3} \Rightarrow E = \sqrt[3]{N^9 \sqrt[3]{N^4}} \\ \Rightarrow E &= \sqrt[3]{N^4 \cdot N^9} \Rightarrow \sqrt[3]{N \sqrt[3]{N} \sqrt[3]{N}} = \sqrt[27]{N^{13}} \Rightarrow \sqrt[3]{N \sqrt[3]{N} \sqrt[3]{N}} = N^{\frac{13}{27}}.\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b-a}{a-b} \sqrt{\frac{a^{a+b} \cdot b^b + b^{a+b} \cdot a^a}{a^{2b} \cdot b^a + b^{2a} \cdot a^b}} = \frac{b}{a}.$$

Questão 2.8

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{4^a} + \frac{a-b}{a-b} \sqrt{4^b}}{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{a+b}}} = \frac{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{(2^2)^a}}{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{a+b}}} + \frac{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{(2^2)^b}}{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{a+b}}} \\ \Rightarrow E &= \frac{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{2a}}}{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{a+b}}} + \frac{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{2b}}}{\frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{a+b}}} = \frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{2a-a-b}} + \frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{2b-a-b}} \\ \Rightarrow E &= \frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{a-b}} + \frac{a-b}{a-b} \sqrt{2^{b-a}} = 2 + 2^{-1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Questão 2.9

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} E &= \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^a \left[a \left(a^a \right)^{a^a} \right]^a \right]^{a^a}} = \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^a \left[a \cdot a^{a \cdot a^a} \right]^a \right]^{a^a}} \\ E &= \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^a \left[a^{a^{a+1}+1} \right]^a \right]^{a^a}} = \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^a \cdot a^{a(a^{a+1}+1)} \right]^{a^a}} \\ \Rightarrow E &= \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^{a^2+2+a} \right]^{a^a}} \Rightarrow E = \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^{a^2(a^{a+1}+1)} \right]} \\ \Rightarrow E &= \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^{a^2+2+2a^{a+1}} \right]} \Rightarrow E = \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left(a^{a+1} \right)^2 + 2a^{a+1}+1} \\ \Rightarrow E &= \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left(a^{a+1}+1 \right)^2} \therefore \frac{(a^{a+1}+1)^2}{a} \sqrt{a \left[a^a \left[a \left(a^a \right)^{a^a} \right]^a \right]^{a^a}} = a. \end{aligned}$$

Questão 2.10

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[3]{4\sqrt[5]{6a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 E &= \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= \frac{180}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{180}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= \frac{180}{\sqrt[3]{a^{1+60+15+3}}} \therefore E = \frac{180}{\sqrt[3]{a^{79}}}
 \end{aligned}$$

Resolução 02: Colocando os radicandos "para dentro das raízes", temos:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[3]{4\sqrt[5]{6a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow E = \frac{360}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} \Rightarrow \\
 \therefore \sqrt[3]{4\sqrt[5]{6a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}} &= \frac{180}{\sqrt[3]{a^{79}}}
 \end{aligned}$$

Questão 2.11

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{n \cdot \sqrt[n]{a^{n^2+5n}} \cdot \sqrt[n]{a^{n^2}}}{\sqrt[n]{a^{3n^2}}} \Rightarrow E = \frac{n \cdot \sqrt[n]{a^{n^2+5n}} \cdot \sqrt[n]{a^{n^2}}}{\sqrt[n]{a^{3n^2}}} \Rightarrow E = \frac{n \cdot \sqrt[n]{a^{n^2+6n}}}{\sqrt[n]{a^{3n^2}}} \\
 \Rightarrow E &= \frac{n \cdot \sqrt[n]{a^{n^2+6n-3n}}}{\sqrt[n]{a^{3n^2}}} \Rightarrow E = \frac{n \cdot \sqrt[n]{a^{n^2+3n}}}{\sqrt[n]{a^{3n^2}}} \Rightarrow E = \frac{n \cdot \sqrt[n]{a^{n(n+3)}}}{\sqrt[n]{a^{3n^2}}} \therefore E = a^n
 \end{aligned}$$

Questão 2.12

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^{-n} \cdot \sqrt[n]{2^{n+1}}}{\sqrt[4]{4}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{2^{n+1} \cdot (2^{-n})^2}}{\sqrt[4]{4}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{4 \cdot (2^{n+1} \cdot 2^{-2n})^2}}{\sqrt[4]{4}}}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E &= \sqrt[n]{\frac{\sqrt[4]{(2^{n+1-2n})^2}}{\sqrt[4]{2^2}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[4]{(2^{1-n})^2}}{2^2}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[4]{2^{2-2n}}}{2^2}} \\
 \Rightarrow E &= \frac{n \cdot 2 \cdot 4}{\sqrt{2^{2-2n-2}}} \Rightarrow E = \sqrt[8n]{2^{-2n}} \Rightarrow E = 2^{\frac{-2n}{8n}} \Rightarrow E = 2^{-\frac{1}{4}} \\
 \Rightarrow E &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{2} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{2^{-n} \cdot \sqrt[4]{2^{n+1}}}{\sqrt[4]{4}}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}.
 \end{aligned}$$

(*) Observação: Veja essa técnica no capítulo de racionalização!

Questão 2.13

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{16} \sqrt[5]{4}}{2 \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}}{\sqrt[5]{4} \cdot 2^5 \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[15]{4}}{\sqrt[5]{4} \cdot 2^5 \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow \\
 E &= \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{(2^4)^5} \cdot 15 \sqrt[15]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2} \cdot 2^5 \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{2^{20}} \cdot 15 \sqrt[15]{2^2}}{15 \sqrt[15]{(2^7)^3} \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{2^{20} \cdot 2^2}}{15 \sqrt[15]{2^{21} \cdot 2}}} \\
 \Rightarrow E &= \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{2^{22}}}{15 \sqrt[15]{2^{22}}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{1} \therefore \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{16} \sqrt[5]{4}}{2 \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[15]{2}}} = 1.
 \end{aligned}$$

Resolução 02: Colocando os radicandos "para dentro das raízes", temos:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{16} \sqrt[5]{4}}{2 \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{4} \cdot (16)^5}}{2 \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{2^2} \cdot (2^4)^5}{\sqrt[5]{4} \cdot 2^5 \cdot \sqrt[15]{2}}} \\
 \Rightarrow E &= \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{2^2} \cdot 2^{20}}{15 \sqrt[15]{(2^2 \cdot 2^5)^3} \cdot \sqrt[15]{2}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{2^{22}}}{15 \sqrt[15]{(2^7)^3} \cdot 2}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{15 \sqrt[15]{2^{22}}}{15 \sqrt[15]{2^{22}}}} = 1.
 \end{aligned}$$

Questão 2.14

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[n]{\frac{64^n + 16^{2n}}{8^n + 32^n}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{(8^2)^n + (2^4)^{2n}}{8^n + 32^n}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{8^{2n} + (2^8)^n}{8^n + 32^n}} \Rightarrow \\
 E &= \sqrt[n]{\frac{8^{2n} + (2^{3+5})^n}{8^n + 32^n}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{8^{n+n} + (2^3 \cdot 2^5)^n}{8^n + 32^n}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{\frac{8^n \cdot 8^n + (8^n \cdot 32^n)}{8^n + 32^n}} \\
 \Rightarrow E &= \sqrt[n]{\frac{8^n(8^n + 32^n)}{8^n + 32^n}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{8^n} \therefore \sqrt[n]{\frac{64^n + 16^{2n}}{8^n + 32^n}} = 8.
 \end{aligned}$$

Questão 2.15

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= a \cdot b \sqrt{\frac{b/a^2b}{a^2b^2b}} \Rightarrow E = a \cdot b \sqrt{\frac{ab \sqrt{a^2b^2b}}{a^2b^2b}} \Rightarrow E = \frac{a \cdot b}{\sqrt{ab \sqrt{a^2b^2b^2b}}} \\
 \Rightarrow E &= \frac{a \cdot b}{\sqrt{ab \sqrt{a(a-b)(a-b)}b^2a-b}} \therefore \frac{a \cdot b}{\sqrt{ab \sqrt{a^2b^2b}}} = \frac{ab \sqrt{a(a+b)}}{ab \sqrt{a^2b^2b}}.
 \end{aligned}$$

Questão 2.16

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b \sqrt{\frac{b/x}{y}} \cdot b \cdot a \sqrt{\frac{a/x}{y}} &= \left[(\sqrt{2})^{\frac{x}{a}} \right]^{\frac{y}{b}} \Rightarrow a \cdot b \sqrt{\frac{x^a}{y^b}} \cdot b \cdot a \sqrt{\frac{x^b}{y^a}} = (\sqrt{2})^{\frac{xy}{ab}} \\
 \Rightarrow \frac{ab(a-b) \sqrt{x^a}}{y^b} \cdot \frac{ab(b-a) \sqrt{x^b}}{y^a} &= \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{xy}{ab}} \Rightarrow \frac{x^{\frac{a}{ab(a-b)}}}{y^{\frac{b}{ab(a-b)}}} \cdot \frac{x^{\frac{b}{ab(b-a)}}}{y^{\frac{a}{ab(b-a)}}} = 2^{\left(\frac{xy}{2ab} \right)} \\
 \Rightarrow \frac{x^{\frac{a}{ab(a-b)}}}{y^{\frac{b}{ab(a-b)}}} \cdot \frac{x^{\frac{b}{ab(b-a)}}}{y^{\frac{a}{ab(b-a)}}} &= 2^{\left(\frac{xy}{2ab} \right)} \Rightarrow \frac{x^{\frac{a-b}{ab(a-b)}}}{y^{\frac{b-a}{ab(a-b)}}} = 2^{\left(\frac{xy}{2ab} \right)} \\
 \Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{ab}}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{ab}}} &= 2^{\left(\frac{xy}{2ab} \right)} \Rightarrow xy = 2^{\left(\frac{xy}{2} \right)} \Rightarrow (xy)^{\left(\frac{1}{xy} \right)} = 2^{\left(\frac{1}{2} \right)} \therefore \boxed{xy = 2}.
 \end{aligned}$$

Questão 2.17

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} \right)^{\sqrt{a}(\sqrt{a}-a)} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} \Rightarrow E = \left(\sqrt{a}\sqrt{a^a} \right)^{\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-a)}{\sqrt{a}\sqrt{a}}} \cdot \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\Rightarrow E = \left(\sqrt{a}\sqrt{a^a} \right)^{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{a})} \cdot (a^{-1})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow E = \left(\sqrt{a}\sqrt{a^a} \right)^{\sqrt{a}^{-a}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \\
 &\Rightarrow E = \left(\sqrt{a}\sqrt{a^{a^{-a}}} \right) \cdot a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow E = \left(\sqrt{a}\sqrt{a^0} \right) \cdot a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow E = \left(\sqrt{a^1} \right) \cdot a^{-\frac{1}{2}} \\
 &\Rightarrow E = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow E = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \Rightarrow E = a^0 \therefore E = 1.
 \end{aligned}$$

Questão 2.18

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{(1-\sqrt{2})^2}{\sqrt{\left[\left(\sqrt{2}\sqrt{2} \right)^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{2}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow E = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\sqrt{2} \right)^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{2}}}} \cdot (2^{-1})^{\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow E = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{\sqrt{\sqrt{2}^2 \cdot 2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{2}}}} \Rightarrow E = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{\sqrt{2 \cdot 2^{-\sqrt{2}}}} \cdot 2^{-\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow E = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{\sqrt{2^{1-\sqrt{2}}}} \cdot 2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow E = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow E = 2^{\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}} \right)} \cdot 2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow E = 2^{\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)} \Rightarrow E = 2^{\left(\frac{1-(1-\sqrt{2})\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right)} \\
 &\Rightarrow E = 2^{\left(\frac{1-\sqrt{2}+2}{1-\sqrt{2}} \right)} \Rightarrow E = 2^{\left(\frac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right)} \Rightarrow E = 2^{\left(\frac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)} \\
 &\Rightarrow E = 2^{\left(\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{1-2} \right)} \Rightarrow E = 2^{-(1+2\sqrt{2})} \therefore E = \left(\frac{1}{2} \right)^{(1+2\sqrt{2})}.
 \end{aligned}$$

Questão 2.19

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \left[\sqrt[5]{5}^{-5 \cdot 5^{-3}} \cdot \left(-\sqrt[5]{5}^{(5/5-1)} \right)^5 \right] \cdot 5^{-5^{-1}} \cdot \sqrt[5]{5}^{5^0}$$

$$\Rightarrow E = \left[5^{\left(\frac{5^{-3} \cdot 5}{5} \right)} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt[5]{5}}{5} \right)^5 \right] \cdot 5^{-5^{-1}} \cdot \sqrt[5]{5}^{5^1}$$

$$\Rightarrow E = \left[5^{\left(\frac{5^{-3} \cdot 5}{5} \right)} \cdot 5^{\frac{(5/5 - 5/25)}{25}} \right] \cdot \left(5^{-1/5} \right)^5 \Rightarrow E = \left[5^{\left(\frac{5^{-8}}{5} \right)} \cdot 5^{\frac{1}{5^5} - \frac{2}{5^5}} \right] \cdot 5^{\frac{4}{5^5}}$$

$$\Rightarrow E = \left[5^{5^{-8} - \frac{1}{5^5} - \frac{2}{5^5} - 2} \right] \cdot \left(5^{\frac{4}{5^5}} \right) \Rightarrow E = \left[5^{5^{-8} - \frac{8}{5^5} - \frac{4}{5^5} - \frac{8}{5^5}} \right] \cdot \left(5^{\frac{4}{5^5}} \right)$$

$$\Rightarrow E = \left[5^{5^{-8} - \frac{4}{5^5}} \right] \cdot \left(5^{\frac{4}{5^5}} \right) \Rightarrow E = 5^{\left(5^{-8} - \frac{4}{5^5} \right) + \frac{4}{5^5}} \Rightarrow E = 5^{\left(5^{-8} + \frac{4}{5^5} - \frac{4}{5^5} \right)}$$

$$\Rightarrow E = 5^{(5^0)} \Rightarrow E = 5^{(1)} \therefore E = 5.$$

Questão 2.20

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \left[9^{\frac{4}{2}} \sqrt[3]{3^{\frac{4}{2}} \sqrt{3^{9^{2^2-1}}}} \right]^{\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3} \right)^{2-9^{\frac{4}{2}}}} = \left[3^{\frac{4}{2}} \sqrt[3]{3^{9^{\frac{1}{2}}}} \right]^{\left(\frac{\sqrt[3]{3^2}}{3} \right)^{2-9^{\frac{4}{2}}}}$$

$$\Rightarrow E = \left(3^3 \frac{3^{\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)}}{3^{\frac{4}{2}}} \right)^{\left(\frac{2}{3^{\frac{1}{2}}-1} \right)^{2-9^{\frac{4}{2}}}} = \left(3^{3 \cdot 3^{\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \frac{4}{2}}} \right)^{\frac{\left(3^{\frac{1}{3}} \right)^{2-9^{\frac{4}{2}}}}{3^{2^{\frac{4}{2}}}}}$$

$$\Rightarrow E = \left[3^{3 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{2} \right)} \right]^{\left(\frac{9^{\frac{4}{2}-2} - 2^{\frac{4}{2}}}{3} \right)} = \left[3^{3 \left(\frac{3 + \sqrt{2} - 3^{\frac{4}{2}}}{3} \right)} \right]^{\left(\frac{9^{\frac{4}{2}-2} - 6^{\frac{4}{2}}}{3} \right)}$$

$$\Rightarrow E = \left[3^{3 \left(\frac{3 + \sqrt{2} - 3^{\frac{4}{2}}}{3} \right)} \right]^{\left(\frac{3^{\frac{4}{2}-2}}{3} \right)} = 3^{3 \left(\frac{3 + \sqrt{2} - 3^{\frac{4}{2}}}{3} \right) \cdot \left(\frac{3^{\frac{4}{2}-2}}{3} \right)}$$

$$\Rightarrow E = 3^{3 \left(\frac{3 + \sqrt{2} - 3^{\frac{4}{2}}}{3} \right) \cdot \left(\frac{3^{\frac{4}{2}-2}}{3} \right)} = 3^{3 \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{3} \right)}$$

Questão 2.21 - Resposta: Alternativa B
Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sqrt[b]{\frac{b^b}{a^b}} \sqrt{\left(\sqrt[b]{\frac{b^b}{a^b}} \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{\sqrt[b]{a^a}}}}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{\sqrt[b]{b^b \cdot a^{-b}} \sqrt{\frac{bc \left(\sqrt[b]{a^a}\right)}{\sqrt[b]{\frac{b^b}{a^b}}}}}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{\sqrt[b]{b^b \cdot a^{-b}} \sqrt{c \left(\sqrt[b]{a^a \cdot b^{-a}}\right)}}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} \\
 \Rightarrow E &= \frac{c \left(\frac{\sqrt[b]{a^a \cdot b^{-a}}}{\sqrt[b]{b^b \cdot a^{-b}}}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{c \left(\frac{ab \sqrt[a^2]{a^2 \cdot b^{-a^2}}}{ab \sqrt[b^2]{b^2 \cdot a^{-b^2}}}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{c \left(ab \sqrt[a^2]{a^2 \cdot b^{-a^2}}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} \\
 \Rightarrow E &= \frac{c \left(ab \sqrt[a^2+b^2]{a^2+b^2 \cdot b^{-a^2-b^2}}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{c^a \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right) \cdot c^b \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{c \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} \\
 \Rightarrow E &= \frac{c^c \left(\frac{a+b}{b \cdot a}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{c^c \left(\frac{c+1}{c}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} = \frac{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)}{c^c \left(\frac{c^2+1}{c}\right)} \quad \therefore E = 1.
 \end{aligned}$$

Questão 2.22
Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sqrt[3]{a^{m+2}} \cdot \sqrt{a^{m+3}}}{\sqrt[6]{a^{m-1}}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[6]{(a^{m+2})^2} \cdot \sqrt[6]{(a^{m+3})^3}}{\sqrt[6]{a^{m-1}}} \\
 \Rightarrow E &= \frac{\sqrt[6]{a^{2m+4}} \cdot a^{3m+9}}{\sqrt[6]{a^{m-1}}} \Rightarrow E = \sqrt[6]{a^{2m+4+3m+9-(m-1)}} \Rightarrow E = \sqrt[6]{a^{6m+12}} \\
 \Rightarrow E &= \sqrt[6]{a^{6(m+2)}} \quad \therefore \frac{\sqrt[3]{a^{m+2}} \cdot \sqrt{a^{m+3}}}{\sqrt[6]{a^{m-1}}} = a^{m+2}.
 \end{aligned}$$

Questão 2.23**Resolução:** Podemos escrever:

$$E = \sqrt[3]{2^{10}} \cdot \sqrt[5]{7^7} \cdot \sqrt[3]{81} \Rightarrow E = 2^3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 7 \cdot \sqrt[5]{7^2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow E = 168 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[3]{3} \therefore \sqrt[3]{2^{10}} \cdot \sqrt[5]{7^7} \cdot \sqrt[3]{81} = 168 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[5]{49}.$$

Questão 2.24**Resolução:** Podemos escrever:

$$E = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[1]{8}}} \Rightarrow E = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[1]{\frac{8}{1}}} \Rightarrow E = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{8^3}} \Rightarrow E = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^2 \cdot (2^3)^3}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^2 \cdot 2^9}} \Rightarrow E = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{11}}} \therefore \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[1]{8}}} = \sqrt[24]{2^{11}}.$$

Questão 2.25**Resolução:** Podemos escrever:

$$E = \sqrt[3]{\frac{a^3 b}{a^2 b^5}} \cdot \sqrt[6]{a^{30} b^{43}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{a^3 b} \cdot \sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{\frac{2}{b^3}}}{a^2 b^5}} \cdot \sqrt[6]{a^{30} b^{43}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[3]{a^3 b} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^{15}}{a^2 b^5}} \cdot \sqrt[180]{a^{30} b^{43}} = \sqrt[3]{a^3 b} \cdot \sqrt[4]{a^{-2} b^{\frac{2}{15}-5}} \cdot \sqrt[180]{a^{30} b^{43}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[3]{a^3 b} \cdot \sqrt[4]{a^{-2} b^{\frac{2-75}{15}}} \cdot \sqrt[180]{a^{30} b^{43}} = \sqrt[3]{a^3 b} \cdot a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{-73}{60}} \cdot \sqrt[180]{a^{30} b^{43}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[3]{a^{\frac{3}{1}-\frac{1}{2}} b^{\frac{-73}{60}}} \cdot \sqrt[180]{a^{30} b^{43}} = \sqrt[3]{a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{-73}{60}}} \cdot \sqrt[180]{a^{30} b^{43}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[180]{a^{\left(\frac{5}{2}\right)60} b^{\left(\frac{-73}{60}\right)60}} \cdot \sqrt[180]{a^{30} b^{43}} = \sqrt[180]{a^{-150} b^{-13} \cdot a^{30} b^{43}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[180]{a^{-120} b^{30}} = a^{-\frac{150}{180}} b^{\frac{30}{180}} \therefore E = a^{-\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{6}}.$$

Questão 2.26

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{x^5}}{x^4}} \cdot \frac{x^3}{x^2}} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$E = x^{\left(\frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right)} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{5}{120} - \frac{20}{120} + \frac{60}{120} - \frac{120}{120}\right)}$$

$$\Rightarrow E = x^{\left(-\frac{75}{120}\right)} \therefore E = x^{\left(-\frac{5}{8}\right)}.$$

Questão 2.27

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[5]{x^2 \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^7}}} \div \sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{x^6}}{x}} \Rightarrow E = \sqrt[5]{x^2 \sqrt[3]{x^7 \cdot x^{4 \cdot 2}}} \div x^{\left(\frac{6}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{2}{2}\right)}$$

$$E = \sqrt[5]{x^2 \sqrt[6]{x^{7 \cdot 8}}} \div x^{\left(\frac{6}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 5}\right)} \Rightarrow E = \sqrt[5]{x^{15} \cdot x^{26}} \div x^{\left(\frac{6}{40} - \frac{5}{40} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{40}\right)}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[5]{x^{15+26}} \div x^{\left(\frac{6}{40} - \frac{5}{40} + \frac{40}{40}\right)} \Rightarrow E = \sqrt[5]{x^{41}} \div x^{\left(\frac{41}{40}\right)} \Rightarrow E = x^{\frac{27}{5} - \left(\frac{41}{40}\right)}$$

$$\Rightarrow E = x^{\frac{216}{40} - \left(\frac{41}{40}\right)} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{216-41}{40}\right)} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{175}{40}\right)} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{35}{8}\right)}$$

$$\Rightarrow E = x^{\left(\frac{32}{8} + \frac{3}{8}\right)} \Rightarrow E = x^{\left(4 + \frac{3}{8}\right)} \therefore E = x^4 \cdot \sqrt[8]{x^3}.$$

Questão 2.28 Resposta: Alternativa B

Resolução: Podemos escrever:

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\frac{x^n}{x^3}} \cdot \frac{x^2}{x^1}}} = x^{\left(2^{100} - 101\right)} \Rightarrow x^{\left(\frac{n}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{"n" vezes}}} - \frac{-(n-1)}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{"n-1" vezes}}} + \dots + \frac{1}{2}\right)} = x^{\left(2^{100} - 101\right)}$$

$$\Rightarrow x^{\left(\frac{n}{2^n} + \frac{2(n-1)}{2^n} + \frac{2^2(n-2)}{2^n} + \dots + \frac{2^n}{2^n}\right)} = x^{\left(2^{100} - 101\right)}$$

$$\Rightarrow E = x^{\left(\frac{n!}{n!} - \frac{(n-1)!}{(n-1)!} + \dots - \frac{2!}{2!} + \frac{1!}{1!} \right)} = x^{\frac{n^\circ \text{ impar de "uns"}}{(1-1+\dots-1+1)}} \therefore E = x.$$

Questão 2.30

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x^2} \cdot \sqrt[n]{x^3} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^n}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[n]{x^{1+2+3+\dots+n}} = \sqrt[n]{x^{\frac{(1+n) \cdot n}{2}}} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{n+1}{2} \right)}$$

Questão 2.31

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[5]{3^8} \cdot \sqrt[5]{3^{16}} = \sqrt[5]{3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^8 \cdot 3^{16}} \Rightarrow$$

$$E = \sqrt[5]{3^{2+4+8+16}} = \sqrt[5]{3^{30}} = 3^6 \Rightarrow E = 729.$$

Questão 2.32

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{2^3} \cdot \sqrt[10]{2^5} \cdot \sqrt[10]{2^7} \cdot \dots \cdot \sqrt[10]{2^{99}} = \sqrt[10]{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{99}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[10]{2^{1+3+5+\dots+99}} = \sqrt[10]{2^{\frac{(1+99) \cdot 50}{2}}} = 2^{\left(\frac{100}{2} \right) \cdot \left(\frac{50}{10} \right)}$$

$$\Rightarrow E = 2^{50 \cdot 5} \Rightarrow E = 2^{250}.$$

Questão 2.33

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[5]{2} \Rightarrow E = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[24]{2} \cdot \sqrt[120]{2} \Rightarrow E = \sqrt[120]{2^{60}} \cdot \sqrt[120]{2^{20}} \cdot \sqrt[120]{2^5} \cdot \sqrt[120]{2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[120]{2^{60} \cdot 2^{20} \cdot 2^5 \cdot 2} \Rightarrow E = \sqrt[120]{2^{60+20+5+1}} \Rightarrow E = \sqrt[120]{2^{86}}$$

$$\Rightarrow E = 2^{\frac{86}{120}} \therefore E = 2^{\frac{43}{60}}.$$

Questão 2.34

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[6]{7 \sqrt[5]{7 \sqrt[4]{7 \sqrt[3]{7 \sqrt[2]{7}}}}} \Rightarrow E = \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[2]{7} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[30]{7} \cdot \sqrt[120]{7} \cdot \sqrt[360]{7} \cdot \sqrt[720]{7} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[720]{7^{120} \cdot 7^{24} \cdot 7^{20} \cdot 7^6 \cdot 7^2 \cdot 7} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[720]{7^{120+24+20+6+2+1}} \Rightarrow E = \sqrt[720]{7^{153}} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[720]{7^{153}} \Rightarrow E = 7^{\frac{153}{720}} \Rightarrow E = 7^{\frac{51}{240}} \therefore E = 7^{\frac{17}{80}}.
 \end{aligned}$$

Questão 2.35 Resposta: Alternativa C

Resolução: Da multiplicação e divisão de radicais em potência de 2, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sqrt[n]{x \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x}}}}} }{\sqrt[n]{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \sqrt{x}}}}} \\
 &= \frac{2^n \sqrt{x^{2^n - 1}}}{2^n \sqrt{x^{\left(\frac{1 - 2^n}{3}\right)}}} = \sqrt[n]{x^{2^n - 1 - \left(\frac{1 - 2^n}{3}\right)}} \\
 &= \sqrt[n]{x^{\left(\frac{3 \cdot 2^n - 3 - 1 + 2^n}{3}\right)}} = \sqrt[n]{x^{\left(\frac{4 \cdot 2^n - 4}{3}\right)}} = x^{\frac{4}{3} \left(\frac{2^n - 1}{2}\right)} = x^{\frac{4}{3} (1 - 2^{-n})}.
 \end{aligned}$$

Questão 2.36Resolução: Da multiplicação de raízes na forma m^n , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \dots \sqrt[3]{x^2}}}}} \Rightarrow E = \sqrt[3^n]{(x^2)^{\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right)}} \Rightarrow E = \sqrt[3^n]{x^{2 \left(\frac{3^n - 1}{2}\right)}} \\
 &\Rightarrow E = \sqrt[3^n]{x^{3^n - 1}} \therefore \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \dots \sqrt[3]{x^2}}}}} = x^{\left(\frac{3^n - 1}{3^n}\right)}.
 \end{aligned}$$

Questão 2.37Resolução: Da multiplicação de raízes na forma m^n , podemos escrever:

$$E = \sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \dots \sqrt[4]{x^3}}}}} \Rightarrow E = \sqrt[4^n]{(x^3)^{\left(\frac{4^n - 1}{4 - 1}\right)}} \Rightarrow E = \sqrt[4^n]{x^{3 \left(\frac{4^n - 1}{3}\right)}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[n]{x^{4^n-1}} \quad \therefore \overbrace{\sqrt[n]{x^3} \sqrt[n]{x^3} \sqrt[n]{x^3} \sqrt[n]{x^3} \dots \sqrt[n]{x^3}}^{\text{"n" radicais}} = x^{\left(\frac{4^n-1}{4^n}\right)}.$$

Questão 2.38

Resolução: Da multiplicação de raízes na forma m^n , podemos escrever:

$$E = \overbrace{\sqrt[6]{x^5} \sqrt[6]{x^5} \sqrt[6]{x^5} \sqrt[6]{x^5} \dots \sqrt[6]{x^5}}^{\text{"n" radicais}} = \sqrt[6^n]{(x^5)^{\left(\frac{6^n-1}{6-1}\right)}}$$

$$E = \sqrt[6^n]{x^{5\left(\frac{6^n-1}{5}\right)}} = \sqrt[6^n]{x^{6^n-1}} = x^{\left(\frac{6^n-1}{6^n}\right)}.$$

Questão 2.39

Resolução: Da multiplicação de raízes na forma m^n , podemos escrever:

$$E = \overbrace{\sqrt[10]{x^9} \sqrt[10]{x^9} \sqrt[10]{x^9} \sqrt[10]{x^9} \dots \sqrt[10]{x^9}}^{\text{"n" radicais}} \Rightarrow E = \sqrt[10^n]{(x^9)^{\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[10^n]{x^{9\left(\frac{10^n-1}{9}\right)}} \Rightarrow E = \sqrt[10^n]{x^{10^n-1}} \quad \therefore E = x^{\left(\frac{10^n-1}{10^n}\right)}.$$

Questão 2.40

Resolução 01: Note que temos $x-1$ termos, então, da multiplicação de raízes na forma m^n , podemos escrever:

$$E = \overbrace{\sqrt{x^{x^2}} \sqrt{x^{x^3}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}}^{\text{"x-1" vezes}} \Rightarrow E = \sqrt{x^{x^2}} \cdot \sqrt{x^{x^3}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}$$

$$E = \sqrt{x^{x^2}} \cdot x^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}} \Rightarrow E = x^x \cdot x^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}$$

$$\Rightarrow E = x^x \cdot x^x \cdot x^{\frac{x^3}{3}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}} \Rightarrow E = x^x \cdot x^x \cdot x^{\frac{x^3}{3}} \cdot x^{\frac{x^4}{4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}$$

$$\Rightarrow E = x^x \cdot x^x \cdot x^x \cdot x^{\frac{x^4}{4}} \sqrt{\dots \sqrt{x^{x^x}}} \dots \Rightarrow E = x^x \cdot x^x \cdot x^x \dots x^{\frac{x^{x-1}}{x-1}} \sqrt{x^{x^x}}$$

$$\Rightarrow E = \overbrace{x^x \cdot x^x \cdot x^x \dots x^x}^{\text{"x-1" vezes}} \quad \therefore \overbrace{\sqrt{x^{x^2}} \sqrt{x^{x^3}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}}^{\text{"x-1" radicais}} = x^x \cdot (x-1).$$

Resolução 02: Colocando os radicandos "para dentro das raízes", temos:

$$E = \sqrt{x^{x^2}} \sqrt{x^{x^3}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}} \Rightarrow E = \sqrt{x \left(x^{x^2} \right)^x \cdot x^{x^3} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{x \sqrt{x^{x^3}} \cdot x^{x^3} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}} \Rightarrow E = \sqrt{x^2 \sqrt{x^{2x^3}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{x^2 \sqrt{x \left(x^{2x^3} \right)^x \cdot x^{x^4} \dots \sqrt{x^{x^x}}} \Rightarrow E = \sqrt{x^3 \sqrt{x^{2x^4}} \cdot x^{x^4} \dots \sqrt{x^{x^x}}}$$

$$E = \sqrt{x^3 \sqrt{x^{3x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}}} \dots \Rightarrow E = \sqrt{x^{x-1} \sqrt{x^{(x-1)x^x}}} \Rightarrow E = x^{\left(\frac{x-1}{x^{x-1}} \right)}$$

$$\therefore \sqrt{x^{x^2}} \sqrt{x^{x^3}} \sqrt{x^{x^4}} \dots \sqrt{x^{x^x}} = x^{(x-1) \cdot x}$$

Questão 2.41

Resolução: Da multiplicação de raízes na forma m^n , podemos escrever:

$$E = \sqrt[n]{x^{2^3} \sqrt[n]{x^{2^3}} \sqrt[n]{x^{2^3}} \sqrt[n]{x^{2^3}} \dots \sqrt[n]{x^{2^2}}} \Rightarrow E = \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \dots \sqrt[n]{x^{2^2}}^n \Rightarrow E = \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \dots \sqrt[n]{x^{2^2}}^n$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \dots \sqrt[n]{x^{2^2}}^n \Rightarrow E = \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \sqrt[n]{x^{2^3}}^n \dots \sqrt[n]{x^{2^2}}^n$$

Questão 2.42 Resposta: Alternativa B

Sugestão: Use $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{rq[(n-1) \cdot q^n - n \cdot q^{n-1} + 1]}{(q-1)^2}$.

Resolução 01: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{x^n} \sqrt{x^{n-1}} \sqrt{x^{n-2}} \dots \sqrt{x^2} \sqrt{x} \Rightarrow E = \sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x^{n-1}} \sqrt{x^{n-2}} \dots \sqrt{x^2} \sqrt{x}$$

$$E = \sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x^{n-1}} \sqrt{x^{n-2}} \dots \sqrt{x^2} \sqrt{x} \Rightarrow E = x^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{x^{n-1}} \cdot \sqrt{x^{n-2}} \dots \sqrt{x^2} \sqrt{x}$$

$$E = x^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{x^{n-2}} \dots \sqrt{x^2} \sqrt{x} \Rightarrow E = x^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{x^{n-2}} \cdot \sqrt{x^2} \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow E = x^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2^2}} \cdot x^{\frac{n-2}{2^3}} \cdot 2^4 \sqrt{\dots} \sqrt{x} \Rightarrow E = x^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2^2}} \cdot x^{\frac{n-2}{2^3}} \cdot \dots \cdot x^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\Rightarrow E = x^{\left[\frac{1}{2^n} \cdot (n \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^{n-2} + \dots + 1) \right]} \therefore E = x^{\left[\frac{1}{2^n} \cdot S \right]}$$

Chamando essa soma de S, temos:

$$S = n \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^{n-2} + \dots + 1 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1},$$

com $a = 1$, $r = 1$ e $q = 2$.

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{rq[(n-1) \cdot q^n - n \cdot q^{n-1} + 1]}{(q-1)^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{1 \cdot 2[(n-1) \cdot 2^n - n \cdot 2^{n-1} + 1]}{(2-1)^2}$$

$$\Rightarrow S = 2^n - 1 + 2 \cdot (n \cdot 2^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1} + 1)$$

$$\Rightarrow S = 2^n - 1 + \underline{2n \cdot 2^n} - 2 \cdot 2^n - \underline{n \cdot 2^n} + 2 \therefore S = n \cdot 2^n - 2^n + 1.$$

Logo, temos:

$$E = x^{\left[\frac{1}{2^n} S \right]} \Rightarrow E = x^{\left[\frac{1}{2^n} (n \cdot 2^n - 2^n + 1) \right]} \Rightarrow E = x^{\frac{n \cdot 2^n - 2^n + 1}{2^n}} \Rightarrow E = x^{n-1 + \frac{1}{2^n}}$$

$$\therefore E = x^{(n-1) + 2^{-n}}.$$

Resolução 02: Colocando os radicandos "para dentro das raízes", temos:

$$E = \sqrt{x^n \sqrt{x^{n-1} \sqrt{x^{n-2} \dots \sqrt{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x}}}}} \Rightarrow E = \sqrt{x^n \cdot \sqrt{x^{n-1} \sqrt{x^{n-2} \dots \sqrt{x^3 \sqrt{\sqrt{x} \cdot x^{2^2}}}}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{x^n \cdot \sqrt{x^{n-1} \sqrt{x^{n-2} \dots \sqrt{x^3 \cdot 2^2 \sqrt{x^{1+2^2}}}}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{x^n \cdot \sqrt{x^{n-1} \sqrt{x^{n-2} \dots \sqrt{2^2 \sqrt{x^{2 \cdot 2 + 1} \cdot x^{3 \cdot 2^2}}}}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{x^n \cdot \sqrt{x^{n-1} \sqrt{x^{n-2} \dots \sqrt{2^3 \sqrt{x^{1+2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2}}}}}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{2^{n-1} \sqrt{x^{1+2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}}} \quad E = 2^n \sqrt{x^{1+2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}}} \therefore E = 2^n \sqrt{x^S}.$$

Chamando essa soma de S , temos:

$$S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}, \text{ com } a = 1, r = 1 \text{ e } q = 2.$$

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{rq[(n-1) \cdot q^n - n \cdot q^{n-1} + 1]}{(q-1)^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{1 \cdot 2[(n-1) \cdot 2^n - n \cdot 2^{n-1} + 1]}{(2-1)^2}$$

$$\Rightarrow S = 2^n - 1 + 2 \cdot (n \cdot 2^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1} + 1)$$

$$\Rightarrow S = 2^n - 1 + 2n \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n - n \cdot 2^n + 2 \therefore S = n \cdot 2^n - 2^n + 1.$$

Logo, temos:

$$E = \sqrt[n]{x^S} \Rightarrow E = \sqrt[n]{x^{n \cdot 2^n - 2^n + 1}} \Rightarrow E = x^{\frac{n \cdot 2^n - 2^n + 1}{n}} \Rightarrow E = x^{n-1 + \frac{1}{2^n}}$$

$$\therefore E = x^{(n-1) + 2^{-n}}.$$

Questão 2.43 (AHSME-1954/Stanford-2010) - Resposta: Alternativa E

Resolução: Da soma de radicais simples, podemos escrever:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 1}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4}}{2} \therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Questão 2.44 (Harvard-MIT-2000)

Resolução: Da soma com termos em PA, podemos escrever:

$$x = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}} \Rightarrow x = \sqrt{1^2 + 2\sqrt{1^2 + (1+2)\sqrt{1^2 + (2 \cdot 1 + 2)\sqrt{\dots}}}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + 2 \therefore x = 3.$$

Questão 2.45 (Harvard-MIT-2000)

Resolução: Da soma com termos em PA, podemos escrever:

$$x = \sqrt{16 + 3\sqrt{16 + 7\sqrt{16 + 11\sqrt{16 + 15\sqrt{16 + \dots}}}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{4^2 + 3\sqrt{4^2 + (4+3)\sqrt{4^2 + (2 \cdot 4 + 3)\sqrt{\dots}}}} \Rightarrow x = 4 + 3 \therefore x = 7.$$

Questão 2.46

Resolução: Da soma com termos em PA, podemos escrever:

$$x = \sqrt{9 + 2\sqrt{9 + 5\sqrt{9 + 8\sqrt{9 + 11\sqrt{9 + \dots}}}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{3^2 + 2\sqrt{3^2 + (3+2)\sqrt{3^2 + (2 \cdot 3 + 2)\sqrt{\dots \infty}}}} \Rightarrow x = 3 + 2 \therefore x = 5.$$

Questão 2.47

Resolução: Da soma com termos em PA, podemos escrever:

$$x = \sqrt{16 + 1\sqrt{16 + 5\sqrt{16 + 9\sqrt{16 + 13\sqrt{16 + \dots}}}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{4^2 + 1\sqrt{4^2 + (4+1)\sqrt{4^2 + (2 \cdot 4 + 1)\sqrt{\dots \infty}}}} \Rightarrow x = 4 + 1 \therefore x = 5.$$

Questão 2.48

Resolução: Da soma de radicais com termo fora da raiz, podemos escrever:

$$x = \sqrt{a + 2\sqrt{a + 2\sqrt{a + \dots}}} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot a}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{4 + 4a}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{4(1+a)}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 + 2\sqrt{1+a}}{2} \therefore \boxed{x = 1 + \sqrt{1+a}}.$$

Questão 2.49

Resolução: Da soma de radicais com termo fora da raiz, podemos escrever:

$$x = \sqrt{24 + 2\sqrt{24 + 2\sqrt{24 + \dots}}} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 24}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{4 + 96}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{100}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 + 10}{2} \therefore \boxed{x = 6}.$$

Questão 2.50

Resolução: Da soma de radicais simples, podemos escrever:

$$x = \sqrt{2070 + \sqrt{2070 + \sqrt{2070 + \dots}}} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2070}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 8280}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{8281}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + 91}{2} \Rightarrow x = \frac{92}{2} \therefore x = 46.$$

Questão 2.51

Resolução: Fazendo $A = n + a$ e $B = x$, na soma com termos em PA, podemos escrever:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{A^2 + B} \sqrt{A^2 + (A+B)} \sqrt{A^2 + (2A+B)} \sqrt{\dots} \\ k &= \sqrt{(n+a)^2 + x} \sqrt{(n+a)^2 + (n+a+x)} \sqrt{(n+a)^2 + [2(n+a)+x]} \sqrt{\dots} \\ k &= \sqrt{(n+a)^2 + x} \sqrt{(n+a)^2 + (n+a+x)} \sqrt{(n+a)^2 + (2n+2a+x)} \sqrt{\dots} \\ \therefore k &= n+a+x. \end{aligned}$$

Questão 2.52

Resolução: Podemos escrever:

$$x = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \dots}}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{60+x} \Rightarrow x^3 = 60+x \therefore x^3 - x - 60 = 0.$$

Note que, pelo teorema do fator, 4 é raiz dessa equação. Como as outras raízes são complexas (verifique!), temos que a resposta é 4.

Questão 2.53

Resolução: Da diferença de radicais simples, podemos escrever.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - \sqrt{\frac{21}{16}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{21}{16}}} - \dots \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{21}{16}}}{2} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{21}{4}}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{\frac{4+21}{4}}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{\frac{25}{4}}}{2} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 + \frac{5}{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2+5}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \therefore x = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Questão 2.54 (Rússia/IMO-Longlist-1969)

Resolução: Dos radicais alternados, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a - b} \sqrt{a + b} \sqrt{a - b} \sqrt{a + b} \dots \Rightarrow x^2 = a - b\sqrt{a + bx} \\ \Rightarrow b\sqrt{a + bx} &= a - x^2 \Rightarrow b^2(a + bx) = (a - x^2)^2 \\ \Rightarrow ab^2 + b^3x &= a^2 - 2ax^2 + x^4 \Rightarrow x^4 - 2ax^2 + a^2 - b^3x - ab^2 = 0. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo bx^3 , b^2x^2 e abx , temos:

$$x^4 - \boxed{2ax^2} + a^2 - b^3x - ab^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x^4} - \boxed{ax^2 - ax^2} + \overline{a^2} - \overline{b^3x} - \overline{ab^2} - \overline{bx^3} + \underline{bx^3} + \underline{b^2x^2} - \overline{b^2x^2} + \overline{abx} - \overline{abx} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x^2} \left(x^2 - a + bx + b^2 \right) - \overline{bx} \left(b^2 + x^2 + bx - a \right) - \overline{a} \left(x^2 - a + b^2 + bx \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + bx + b^2 - a \right) \left(x^2 - bx - a \right) = 0$$

$$\therefore x^2 + bx + b^2 - a = 0 \text{ ou } x^2 - bx - a = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + bx + b^2 - a = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 - a) \Rightarrow \Delta = b^2 - 4b^2 + 4a$$

$$\therefore \Delta = 4a - 3b^2; \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{4a - 3b^2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{4a - 3b^2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{4a - 3b^2}{4}} \therefore \boxed{x = \sqrt{a - \frac{3b^2}{4}} - \frac{b}{2}};$$

$$\Rightarrow x^2 - bx - a = 0 \Rightarrow \Delta = (-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) \therefore \Delta = b^2 + 4a;$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-b) \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 + 4a}{4}} \therefore \boxed{x = \sqrt{a + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}$$

Do enunciado, note que:

$$a > b^2 \Rightarrow a + \frac{b^2}{4} > b^2 + \frac{b^2}{4} \Rightarrow a + \frac{b^2}{4} > \frac{5b^2}{4}.$$

Da condição de existência do radical, temos:

$$a + \frac{b^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{5b^2}{4} < 0 \Rightarrow b^2 < 0, \text{ absurdo!}$$

$$\text{Logo } \sqrt{a - b\sqrt{a + b\sqrt{a - b\sqrt{a + \dots}}}} = \sqrt{a - \frac{3b^2}{4}} - \frac{b}{2}.$$

Questão 2.58

Resolução: Dos radicais alternados simples, para $a > 1$, temos:

$$x = \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \dots}}} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{4 \cdot 7 - 3}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{28 - 3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + 5}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{2} \therefore E = 2.$$

Questão 2.59

Resolução: Dos radicais alternados simples, para $0 < a < 1$, temos:

$$x = \sqrt{\frac{33}{64} - \sqrt{\frac{33}{64} + \sqrt{\frac{33}{64} - \dots}}} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{33}{64}}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{33}{16}}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{\frac{16 + 33}{16}}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{\frac{49}{16}}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \frac{7}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{-4 + 7}{4}}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{3}{4}}{2} \therefore \sqrt{\frac{33}{64} - \sqrt{\frac{33}{64} + \sqrt{\frac{33}{64} - \dots}}} = \frac{3}{8}.$$

Questão 2.60

Resolução 01: Sejam a e b , tais que $a = \sqrt[7]{x^4 + \sqrt[7]{x^4 + \sqrt[7]{x^4 + \sqrt[7]{x^4 + \dots}}}}$ e

$$b = \sqrt[4]{x^4 + \sqrt[4]{x^4 + \sqrt[4]{x^4 + \sqrt[4]{x^4 + \dots}}}}, \text{ então temos: } E = \frac{a}{b}.$$

Assim:

$$a = \sqrt[7]{x^4 + \sqrt[7]{x^4 + \sqrt[7]{x^4 + \sqrt[7]{x^4 + \dots}}}} \Rightarrow a = \sqrt[7]{x^4 + a} \Rightarrow a^7 = x^4 + a \Rightarrow a^8 = x^4$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[8]{x^4} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{x}}.$$

$$b = \sqrt[4]{x^4 + \sqrt[4]{x^4 + \sqrt[4]{x^4 + \sqrt[4]{x^4 + \dots}}}} \Rightarrow b = \sqrt[4]{x^4 \cdot b} \Rightarrow b^4 = x^4 \cdot b \Rightarrow \frac{b^4}{b} = x^4$$

$$\Rightarrow b^3 = x^4 \Rightarrow b = \sqrt[3]{x^4} \Rightarrow \boxed{b = x \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

Logo, temos:

$$E = \frac{a}{b} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[3]{x}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[6]{x^3}}{x \cdot \sqrt[6]{x^2}} \therefore E = \frac{\sqrt[6]{x}}{x}.$$

Resolução 02: Da a multiplicação e divisão de radicais infinitos, temos:

$$E = \frac{\sqrt[7]{x^4} \div \sqrt[7]{x^4} \div \sqrt[7]{x^4} \div \sqrt[7]{x^4} \div \dots \infty}{\sqrt[4]{x^4} \sqrt[4]{x^4} \sqrt[4]{x^4} \sqrt[4]{x^4} \dots \infty} \Rightarrow E = \frac{7+1}{4-1} \sqrt[4]{x^4} \Rightarrow E = \frac{8}{3} \sqrt[4]{x^4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[3]{x}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[6]{x^3}}{x \cdot \sqrt[6]{x^2}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[6]{x}}{x}$$

Questão 2.61

Resolução 01: Sejam $a = \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \dots \infty$ e

$b = \sqrt[16]{x^9} \sqrt[16]{x^9} \sqrt[16]{x^9} \sqrt[16]{x^9} \dots \infty$, então temos: $E = \frac{a}{b}$.

Assim:

$$a = \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \dots \infty \Rightarrow a = \sqrt[26]{x^9} \div a$$

$$\Rightarrow a^{26} = x^9 \div a \Rightarrow a^{27} = x^9 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[27]{x^9}}$$

$$b = \sqrt[16]{x^9} \sqrt[16]{x^9} \sqrt[16]{x^9} \sqrt[16]{x^9} \dots \infty \Rightarrow b = \sqrt[16]{x^9} \cdot b \Rightarrow b^{16} = x^9 \cdot b$$

$$\Rightarrow \frac{b^{16}}{b} = x^9 \Rightarrow b^{15} = x^9 \Rightarrow b = \sqrt[15]{x^9} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt[15]{x^9}}$$

Logo, temos:

$$E = \frac{a}{b} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[27]{x^9}}{\sqrt[15]{x^9}} \Rightarrow E = \frac{15\sqrt[5]{x^5}}{15\sqrt[9]{x^9}} \Rightarrow E = \frac{15\sqrt[5]{x^5} \cdot 15\sqrt[6]{x^6}}{15\sqrt[9]{x^9} \cdot 15\sqrt[6]{x^6}} \therefore E = \frac{15\sqrt[11]{x^{11}}}{x}$$

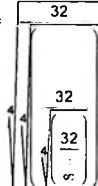
Resolução 02: Da a multiplicação e divisão de radicais infinitos, temos:

$$E = \frac{\sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \sqrt[26]{x^9} \div \dots \infty}{\sqrt[6]{x^9} \sqrt[6]{x^9} \sqrt[6]{x^9} \sqrt[6]{x^9} \dots \infty} \Rightarrow E = \frac{26+1}{16-1} \sqrt[9]{x^9} \Rightarrow E = \frac{27}{15} \sqrt[9]{x^9}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[15]{x^9}} \Rightarrow E = \frac{15\sqrt[5]{x^5}}{15\sqrt[9]{x^9}} \Rightarrow E = \frac{15\sqrt[5]{x^5} \cdot 15\sqrt[6]{x^6}}{15\sqrt[9]{x^9} \cdot 15\sqrt[6]{x^6}} \therefore E = \frac{15\sqrt[11]{x^{11}}}{x}$$


Questão 2.62

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{32}}} = \sqrt[4+1]{32} \Rightarrow E = \sqrt[5]{32} \therefore \boxed{E=2}.$$


Questão 2.63

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{729}}} \Rightarrow E = 729^{\left(\frac{5}{5+1}\right)} \Rightarrow E = \left(3^6\right)^{\left(\frac{5}{6}\right)} \Rightarrow E = 3^5 \therefore \boxed{E=243}.$$


Questão 2.64

Resolução: Podemos escrever:

$$x^{x^{x^{...}}} = 2017 \Rightarrow x^{2017} = 2017 \therefore \boxed{x = \sqrt[2017]{2017}}.$$

Questão 2.65

Resolução: Podemos escrever:

$$x^{x^{x^{...}}} = 27 \Rightarrow x^{27} = 27 \Rightarrow x = \sqrt[27]{27} \Rightarrow x = \sqrt[27]{3^3} \therefore x = \sqrt[9]{3}.$$

Questão 2.66

Resolução: Podemos escrever:

$$x = \sqrt[10]{10}^{\sqrt[10]{10}^{\sqrt[10]{10}^{...}}} \Rightarrow x = \sqrt[10]{10}^x \Rightarrow \sqrt[x]{x} = \sqrt[10]{10} \therefore x = 10.$$

Questão 2.67

Resolução: Podemos escrever:

$$x = \sqrt[243]{243}^{\sqrt[243]{243}^{\sqrt[243]{243}^{...}}} \Rightarrow x = \sqrt[243]{243}^x \Rightarrow \sqrt[x]{x} = \sqrt[243]{243} \therefore x = 243.$$

Questão 2.68

Resolução: Podemos escrever:

$$M = 5^{\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)} \Rightarrow M = 5^{\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)} \Rightarrow M = 5^{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \Rightarrow M = \sqrt{5}^{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$\therefore \boxed{M^{\sqrt{5}} = \sqrt{5}}$$

$$M^{\frac{x-3}{\sqrt{x}}} = \frac{x-3}{\sqrt{x}} \Rightarrow M^{\frac{x-3}{\sqrt{x}}} = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$$

Assim, por comparação, temos:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x}} = \frac{5-3}{\sqrt{5}} \therefore \boxed{x=5}$$

Questão 2.69

Resolução: Podemos escrever:

$$x = 2\sqrt{2}^{\frac{8}{2} \cdot 2^{\frac{2}{2}}} \Rightarrow x = \sqrt{2 \cdot 2^2}^{\frac{8}{2} \cdot 2^{\frac{2}{2}}} \Rightarrow x = \sqrt{8}^{\frac{8}{2} \cdot 2^{\frac{2}{2}}} \therefore x = 8$$

Questão 2.70

Resolução: Podemos escrever:

$$x = 5\sqrt{3}^{\frac{75}{2} \cdot 5^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow x = \sqrt{3 \cdot 5^2}^{\frac{75}{2} \cdot 5^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow x = 5\sqrt{3}^{\frac{75}{2} \cdot 5^{\frac{3}{2}}} \therefore x = 75$$

Questão 2.71

Resolução: Podemos escrever:

$$x^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\dots}}} = 625 \Rightarrow x^{\sqrt{625}} = 625 \Rightarrow x = 625^{\frac{1}{\sqrt{625}}} \Rightarrow x^{\sqrt{625}} = 625^{\frac{\sqrt{625}}{625}}$$

$$\Rightarrow x = \left(5^4\right)^{\frac{25}{625}} \Rightarrow x = 5^4 \left(\frac{1}{25}\right) \therefore \boxed{x = 5^{\frac{4}{25}}}$$

Questão 2.72

Resolução: Podemos escrever:

$$x^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\dots}}} = 1024 \Rightarrow x^{\sqrt{1024}} = 1024 \Rightarrow x = 1024^{\frac{1}{\sqrt{1024}}} \Rightarrow x = 1024^{\frac{\sqrt{1024}}{1024}}$$

$$\Rightarrow x = \left(2^{10}\right)^{\frac{32}{1024}} \Rightarrow x = 2^{10 \left(\frac{1}{32}\right)} \therefore \boxed{x = 2^{\frac{5}{16}}}$$

Questão 2.73**Resolução:** Podemos escrever:

$$x \sqrt[16]{x \sqrt[16]{x \dots}} = 7 \Rightarrow x^{\frac{16}{16}} = 7 \Rightarrow x = 7^{\frac{1}{16}} \Rightarrow x = 7^{\frac{16 \cdot 16^{-1}}{16}} \Rightarrow \boxed{x = 7^{\frac{15}{16}}}$$

Questão 2.74**Resolução:** Podemos escrever:

$$x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \dots}} = 32 \Rightarrow x^{\frac{3}{32}} = 32 \Rightarrow x = 32^{\frac{1}{32}} \Rightarrow x = 2^{\frac{5}{2^{\frac{1}{2^2}}}}$$

$$\Rightarrow x = 2^{\frac{5}{2^{\frac{3-2}{2}}}} \Rightarrow \boxed{x = 2^{\frac{5 \cdot \frac{3}{2}}{4}}}$$

Questão 2.75**Resolução:** Podemos escrever:

$$x \sqrt{x \sqrt{x \dots}} = x^x \quad \therefore \quad 7 \sqrt{7 \sqrt{7 \dots}} = 7^7$$

Questão 2.76**Resolução:** Podemos escrever:

$$x \sqrt{x \sqrt{x \dots}} = x^x \quad \therefore \quad 13 \sqrt{13 \sqrt{13 \dots}} = 13^{13}$$

Capítulo 03 – Racionalização**Questão 3.1 (CN-1954)****Resolução:** Podemos escrever:

$$E = \frac{c}{\sqrt[7]{b^4}} \Rightarrow E = \frac{c}{\sqrt[7]{b^4}} \cdot \frac{\sqrt[7]{b^{7-4}}}{\sqrt[7]{b^{7-4}}} \Rightarrow E = \frac{c \cdot \sqrt[7]{b^{7-4}}}{\sqrt[7]{b^4 \cdot b^{7-4}}} \Rightarrow E = \frac{c \cdot \sqrt[7]{b^3}}{\sqrt[7]{b^{4+7-4}}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{c \cdot \sqrt[7]{b^3}}{\sqrt[7]{b^7}} \quad \therefore \quad \frac{c}{\sqrt[7]{b^4}} = \frac{c \cdot \sqrt[7]{b^3}}{b}$$

Questão 3.2

Resolução: Chamando a expressão de E, podemos escrever:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{3} \cdot 2^3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot 3^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3 \cdot 2^3} \cdot \sqrt[6]{2 \cdot 3^2}}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt[6]{3^{1+2} \cdot 2^{3+1}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^4}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^4}} \cdot \frac{\sqrt[6]{3^{6-3} \cdot 2^{6-4}}}{\sqrt[6]{3^{6-3} \cdot 2^{6-4}}}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^4}} \cdot \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}}{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}} = \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}}{\sqrt[6]{3^{3+3} \cdot 2^{4+2}}} = \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}}{\sqrt[6]{3^6 \cdot 2^6}}$$

$$E = \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}}{3 \cdot 2} \therefore \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{6}$$

Questão 3.3 (CN-1976) - Resposta: Alternativa B

Resolução: Chamando a expressão de E, podemos escrever:

$$E = \frac{A\sqrt{A} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{A} - \sqrt{3}} \Rightarrow E = \frac{A\sqrt{A} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{A} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{3}}{\sqrt{A} + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{A(\sqrt{A})^2 + A\sqrt{A} \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{A} - 3(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{A})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{A \cdot A + A\sqrt{3A} - 3\sqrt{3A} - 3 \cdot 3}{(\sqrt{A})^2 - (\sqrt{3})^2} \Rightarrow E = \frac{A^2 + (A-3)\sqrt{3A} - 3^2}{A-3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(A-3)(A+3) + (A-3)\sqrt{3A}}{A-3} \Rightarrow E = \frac{(A-3)(A+3+\sqrt{3A})}{A-3}$$

$$\therefore E = A+3+\sqrt{3A}.$$

Questão 3.4 (CN-1999-Modificada)

Resolução: Chamando a expressão de E, podemos escrever:

$$E = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow E = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} - \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} \Rightarrow E = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5-3} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\therefore E = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}.$$

Questão 3.5

Resolução: Usando a forma prática, temos:

$$\frac{N}{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{N \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}) \cdot (A + B - C + 2\sqrt{AB})}{(A + B - C)^2 - 4AB}$$

$$E = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}} \Rightarrow E = \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (5 + 3 - 2 + 2\sqrt{5 \cdot 3})}{(5 + 3 - 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$E = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2})(6 + 2\sqrt{15})}{6^2 - 60} \Rightarrow E = \frac{3 \cdot 2(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{15})}{-24} \Rightarrow$$

$$E = \frac{(-\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{15})}{4} \Rightarrow E = \frac{-3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{75} + \sqrt{45} - \sqrt{30}}{4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{-3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + \sqrt{30}}{4} \therefore E = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30}}{4}.$$

Questão 3.6

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3[(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2]} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3 \cdot [5 - 2]}$$

$$\therefore E = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{9}.$$

Questão 3.24

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} \Rightarrow A = 3 \text{ e } B = 8, C = \sqrt{3^2 - 8} \Rightarrow C = \sqrt{9 - 8} \therefore \boxed{C=1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} \therefore \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}} = |\sqrt{2}+1|, \text{ como } \sqrt{2}+1 > 0$$

$$\therefore \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2}+1.$$

Questão 3.25

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{6-2 \cdot 4^2} \Rightarrow \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{6-\sqrt{32}}$$

$$\therefore 6 = A \text{ e } B = 32, C = \sqrt{6^2 - 32} \Rightarrow C = \sqrt{36 - 32} \Rightarrow \boxed{C=2}.$$

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6+2}{2}} - \sqrt{\frac{6-2}{2}} \therefore \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{4-2 \cdot 2\sqrt{2}+2} \Rightarrow \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} \Rightarrow \sqrt{6-4\sqrt{2}} = |2-\sqrt{2}|, \text{ como } 2-\sqrt{2} > 0$$

$$\therefore \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Questão 3.26

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{161+72\sqrt{5}} = \sqrt{161+2 \cdot 72^2} \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} = \sqrt{161+\sqrt{5 \cdot 5184}} = \sqrt{161+\sqrt{25920}}$$

$$\Rightarrow A = 161 \text{ e } B = 25920, C = \sqrt{5^2 - 25920} \Rightarrow C = \sqrt{25921 - 25920}$$

$$\therefore \boxed{C=1} \Rightarrow \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{161+72\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{161+1}{2}} + \sqrt{\frac{161-1}{2}} \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{162}{2}} + \sqrt{\frac{160}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} &= \sqrt{81} + \sqrt{80} \quad \therefore \sqrt{161+72\sqrt{5}} = 9 + 4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Resolução 02: Quando os números são grandes, desconfie. Note que:

$$\begin{aligned}\sqrt{161+72\sqrt{5}} &= \sqrt{161+2 \cdot 36 \sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} = \sqrt{81+2 \cdot 36 \sqrt{5} + 80} \\ &\quad \text{M(5)} \\ \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} &= \sqrt{81+2 \cdot 9 \cdot 4\sqrt{5} + 80} \\ \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} &= \sqrt{9^2 + 2 \cdot 9 \cdot 4\sqrt{5} + (4\sqrt{5})^2} \\ \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} &= \sqrt{(9+4\sqrt{5})^2} \Rightarrow \sqrt{161+72\sqrt{5}} = |9+4\sqrt{5}|, \text{ como} \\ 9+4\sqrt{5} > 0 \quad \therefore \sqrt{161+72\sqrt{5}} &= 9+4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Questão 3.27

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{4-\sqrt{12}} &\Rightarrow A=4 \text{ e } B=12, C=\sqrt{A^2-B} \Rightarrow C=\sqrt{4^2-12} \\ \Rightarrow C &= \sqrt{16-12} \Rightarrow C=\sqrt{4} \Rightarrow \boxed{C=2} \\ \sqrt{4-\sqrt{12}} &= \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} \Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{6}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} \\ \therefore \sqrt{4-\sqrt{12}} &= \sqrt{3}-1.\end{aligned}$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{4-\sqrt{12}} &= \sqrt{1-2\sqrt{3}+3} \Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{1-2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} \\ \Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{12}} &= \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{12}} = |1-\sqrt{3}|, \text{ como } 1-\sqrt{3} < 0 \\ \Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{12}} &= -(1-\sqrt{3}) \quad \therefore \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{3}-1.\end{aligned}$$

Questão 3.28

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{17+\sqrt{2 \cdot 12^2}} \Rightarrow \sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{17+\sqrt{288}}$$

$$A = 17 \text{ e } B = 288, C = \sqrt{17^2 - 288} \Rightarrow C = \sqrt{289 - 288} \therefore \boxed{C=1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \Rightarrow \sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{17+1}{2}} + \sqrt{\frac{17-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{16}{2}} \Rightarrow \sqrt{17+12\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{8}$$

$$\therefore \sqrt{17+12\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{9+2 \cdot 6\sqrt{2}+8} \Rightarrow$$

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{3^2+2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2} \Rightarrow \sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17+12\sqrt{2}} = |3+2\sqrt{2}|, \text{ como } 3+2\sqrt{2} > 0$$

$$\therefore \sqrt{17+12\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}.$$

Questão 3.29

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{32-\sqrt{7 \cdot 10^2}} \Rightarrow \sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{32-\sqrt{700}}$$

$$A = 32 \text{ e } B = 700, C = \sqrt{32^2 - 700} \Rightarrow C = \sqrt{1024 - 700}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{324} \therefore \boxed{C=18} \Rightarrow \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{32+18}{2}} - \sqrt{\frac{32-18}{2}} \Rightarrow \sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{50}{2}} - \sqrt{\frac{14}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{25} - \sqrt{7} \therefore \sqrt{32-10\sqrt{7}} = 5 - \sqrt{7}.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{25-2 \cdot 5\sqrt{7}+7} \Rightarrow$$

$$\sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{5^2-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7}+(\sqrt{7})^2} \Rightarrow \sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{(5-\sqrt{7})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{32-10\sqrt{7}} = |5-\sqrt{7}|, \text{ como } 5-\sqrt{7} > 0 \therefore \sqrt{32-10\sqrt{7}} = 5-\sqrt{7}.$$

Questão 3.30**Resolução 01:** Podemos escrever:

$$\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{16-\sqrt{7 \cdot 6^2}} \Rightarrow \sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{16-\sqrt{252}}$$

$$A = 16 \text{ e } B = 252, C = \sqrt{A^2 - B} \Rightarrow C = \sqrt{16^2 - 252}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{256 - 252} \Rightarrow C = \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{C=2}.$$

$$\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{16+2}{2}} - \sqrt{\frac{16-2}{2}} \Rightarrow \sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{14}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{9} - \sqrt{7} \therefore \sqrt{16-6\sqrt{7}} = 3 - \sqrt{7}.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{9-2 \cdot 3\sqrt{7}+7} \Rightarrow \sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{3^2-2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}+(\sqrt{7})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{(3-\sqrt{7})^2} \Rightarrow \sqrt{16-6\sqrt{7}} = |3-\sqrt{7}|, \text{ como}$$

$$3-\sqrt{7} > 0 \therefore \sqrt{16-6\sqrt{7}} = 3-\sqrt{7}.$$

Questão 3.31**Resolução 01:** Podemos escrever:

$$\sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{3-\sqrt{2 \cdot 2^2}} \Rightarrow \sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$A = 3 \text{ e } B = 8, C = \sqrt{A^2 - B} \Rightarrow C = \sqrt{3^2 - 8} \Rightarrow \boxed{C=1}.$$

$$\sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} \Rightarrow \sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{2} - 1.$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{4-2 \cdot 2\sqrt{6}+6} \Rightarrow \sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{2^2-2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}+(\sqrt{6})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{(2-\sqrt{6})^2} \Rightarrow \sqrt{10-4\sqrt{6}} = |2-\sqrt{6}|, \text{ como } 2-\sqrt{6} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{10-4\sqrt{6}} = -(2-\sqrt{6}) \therefore \sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{6}-2.$$

Questão 3.32

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{9+4\sqrt{5}} &= \sqrt{9+\sqrt{5}\cdot 4^2} \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{9+\sqrt{80}} \\ A=9 \text{ e } B=80, C &= \sqrt{9^2-80} \Rightarrow C = \sqrt{81-80} \therefore \boxed{C=1} \\ \Rightarrow \sqrt{A-\sqrt{B}} &= \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}} \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9+1}{2}} + \sqrt{\frac{9-1}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}} \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2.\end{aligned}$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{9+4\sqrt{5}} &= \sqrt{4+2\cdot 2\sqrt{5}+5} \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot \sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} \\ \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} &= \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} \Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} = |2+\sqrt{5}|, \text{ como} \\ 2+\sqrt{5} > 0 &\Rightarrow \sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Questão 3.33

Resolução 01: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{13+\sqrt{48}} &\Rightarrow A=13 \text{ e } B=48, C = \sqrt{13^2-48} \Rightarrow C = \sqrt{169-48} \\ \Rightarrow C &= \sqrt{121} \therefore \boxed{C=11} \Rightarrow \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{13+\sqrt{48}} &= \sqrt{\frac{13+11}{2}} + \sqrt{\frac{13-11}{2}} \Rightarrow \sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{24}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{13+\sqrt{48}} &= \sqrt{12} + \sqrt{1} \therefore \sqrt{13+\sqrt{48}} = 2\sqrt{3} + 1.\end{aligned}$$

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{13+\sqrt{48}} &= \sqrt{13+4\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{1+2\cdot 2\sqrt{3}+12} \Rightarrow \\ \sqrt{13+\sqrt{48}} &= \sqrt{1^2+2\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2} \Rightarrow \sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{(1+2\sqrt{3})^2} \\ \Rightarrow \sqrt{13+\sqrt{48}} &= |1+2\sqrt{3}|, \text{ como } 1+2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \sqrt{13+\sqrt{48}} = 1+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Questão 3.47 (IMO-Longlist-1988 - Modificada)**Resolução:** Podemos escrever:

$$m = 11 + 6\sqrt{2} \Rightarrow m = 9 + 2 \cdot 3\sqrt{2} + 2 \Rightarrow m = (3 + \sqrt{2})^2$$

$$n = 11 - 6\sqrt{2} \Rightarrow n = 9 - 2 \cdot 3\sqrt{2} + 2 \Rightarrow n = (3 - \sqrt{2})^2$$

$$p = \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2} \Rightarrow p - \sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2} = 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\sqrt{5} + 2} = q; -\sqrt{\sqrt{5} - 2} = r; \Rightarrow \boxed{p + q + r = 0}.$$

$$p + q + r = 0 \Rightarrow p^2 + q^2 + r^2 = -2(pq + qr + rp).$$

$$\Rightarrow (p)^2 + (-\sqrt{\sqrt{5} + 2})^2 + (\sqrt{\sqrt{5} - 2})^2 =$$

$$= -2 \left[(-\sqrt{\sqrt{5} + 2})(-\sqrt{\sqrt{5} - 2}) + p \cdot (-\sqrt{\sqrt{5} + 2}) + p \cdot (\sqrt{\sqrt{5} - 2}) \right]$$

$$\Rightarrow p^2 + \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 = -2 \left[\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} + p \cdot (-\sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2}) \right]$$

$$\Rightarrow p^2 + 2\sqrt{5} = -2 \left[\sqrt{5 - 4} + p \cdot (-p) \right] \Rightarrow p^2 + 2\sqrt{5} = -2(1 - p^2)$$

$$\Rightarrow p^2 + 2\sqrt{5} = -2 + 2p^2 \Rightarrow p^2 = 2\sqrt{5} + 2 \Rightarrow p^2 = 2(\sqrt{5} + 1)$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \therefore \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1}.$$

$$x = \frac{(11 + 6\sqrt{2}) \cdot \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - (11 - 6\sqrt{2}) \cdot \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}}{(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}) \cdot (\sqrt{\sqrt{5} + 1})}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(3 + \sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} - (3 - \sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2}}{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1}) \cdot (\sqrt{\sqrt{5} + 1})}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(3 + \sqrt{2})^2 \cdot (3 - \sqrt{2}) - (3 - \sqrt{2})^2 \cdot (3 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(3 + \sqrt{2}) \cdot (3^2 - (\sqrt{2})^2) - (3 - \sqrt{2}) \cdot (3^2 - (\sqrt{2})^2)}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{(3 + \sqrt{2}) \cdot (9 - 2) - (3 - \sqrt{2}) \cdot (9 - 2)}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{7(3 + \sqrt{2}) - 7(3 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{21 + 7\sqrt{2} - 21 + 7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \therefore \boxed{x = 14}.$$

Questão 3.48 (AHSME-1976) - Resposta: Alternativa A

Resolução: Podemos escrever:

$$a = \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2} \Rightarrow a - \sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2} = 0 \Rightarrow -\sqrt{\sqrt{5} + 2} = b;$$

$$-\sqrt{\sqrt{5} - 2} = c; \Rightarrow \boxed{a + b + c = 0}.$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca).$$

$$\Rightarrow (a)^2 + (-\sqrt{\sqrt{5} + 2})^2 + (\sqrt{\sqrt{5} - 2})^2 =$$

$$= -2 \left[(-\sqrt{\sqrt{5} + 2})(-\sqrt{\sqrt{5} - 2}) + a \cdot (-\sqrt{\sqrt{5} + 2}) + a \cdot (\sqrt{\sqrt{5} - 2}) \right]$$

$$\Rightarrow a^2 + \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 = -2 \left[\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} + a \cdot (-\sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2}) \right]$$

$$\Rightarrow a^2 + 2\sqrt{5} = -2 \left[\sqrt{5 - 4} + a \cdot (-a) \right] \Rightarrow a^2 + 2\sqrt{5} = -2(1 - a^2)$$

$$\Rightarrow a^2 + 2\sqrt{5} = -2 + 2a^2 \Rightarrow a^2 = 2\sqrt{5} + 2 \Rightarrow a^2 = 2(\sqrt{5} + 1)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \therefore \boxed{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1}}.$$

$$m = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \Rightarrow m = \sqrt{2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + 1} \Rightarrow m = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{|\sqrt{2} - 1|}, \text{ como } \sqrt{2} - 1 > 0 \therefore \boxed{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1}.$$

$$N = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \Rightarrow N = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} - (\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow N = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \therefore \boxed{N = 1}.$$

Questão 3.49

Resolução 01: Podemos montar a seguinte equação:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{A^2 - B}) - A = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{2^2 - 5}) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{4 - 5}) - 2 = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (\sqrt[3]{-1}) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (-1) - 2 = 0 \therefore 4m^3 + 3m - 2 = 0.$$

Usando o teorema do fator (*), note que a única raiz real dessa equação

$4m^3 + 3m - 2 = 0$ é $\frac{1}{2}$, ou seja $m = \frac{1}{2}$. Assim, substituindo na outra expressão,

temos:

$$n = m^2 - 3\sqrt{(2^2 - 5)} \Rightarrow n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\sqrt{(-1)} \Rightarrow n = \frac{1}{4} - (-1) \Rightarrow n = \frac{1}{4} + 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{1+4}{4} \therefore n = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \therefore \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(*) Veja o teorema do fator no capítulo de Fatoração.

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[3]{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}} = \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})^3}$$

$$\Rightarrow (A^2 + 3B)A + (3A^2 + B)\sqrt{B} = 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Por comparação, temos:

$$B = \frac{5}{4} \Rightarrow 3A^2 + B = 2 \Rightarrow 3A^2 + \frac{5}{4} = 2 \Rightarrow 3A^2 = 2 - \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 3A^2 = \frac{8-5}{4} \Rightarrow 3A^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{2} \text{ (eq1) e}$$

$$(A^2 + 3B)A = 2 \Rightarrow \left(A^2 + 3 \cdot \frac{5}{4}\right)A = 2 \Rightarrow 4A^3 + 15A = 8 \text{ (eq2)}$$

Note que $A = -\frac{1}{2}$ não satisfaz (eq2). Portanto $A = \frac{1}{2}$.

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)^3} \therefore \boxed{\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

Questão 3.50 (CN-1982) - Resposta Alternativa D

Resolução 01: Podemos montar a seguinte equação:

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{10 + \sqrt{3} \cdot 6^2} = \boxed{\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}}$$

$$4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{A^2 - B}\right) - A = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{10^2 - 108}\right) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{100 - 108}\right) - 10 = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{-8}\right) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot (-2) - 10 = 0 \Rightarrow 4m^3 + 6m - 10 = 0.$$

Usando o teorema do fator (*), note que a única raiz real dessa equação $4m^3 + 6m - 10 = 0$ é 1, ou seja $m = 1$. Assim, substituindo na outra expressão, temos:

$$n = m^2 - 3\sqrt{(10^2 - 108)} \Rightarrow n = 1^2 - 3\sqrt{(-8)} \Rightarrow n = 1 - (-2) \Rightarrow n = 3.$$

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3}.$$

(*) Veja o teorema do fator no capítulo de Fatoração.

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})^3} \Rightarrow (A^2 + 3B)A + (3A^2 + B)\sqrt{B} = 10 + 6\sqrt{3}.$$

Por comparação, temos:

$$\begin{aligned} B = 3 &\Rightarrow 3A^2 + B = 6 \Rightarrow 3A^2 + 3 = 6 \Rightarrow 3A^2 = 6 - 3 \Rightarrow 3A^2 = 3 \\ &\Rightarrow A^2 = 1 \Rightarrow A = \pm 1 \text{ (eq1) e } (A^2 + 3B)A = 10 \Rightarrow (A^2 + 3 \cdot 3)A = 10 \\ &\Rightarrow A^3 + 9A = 10 \text{ (eq2)} \end{aligned}$$

Note que $A = -1$ não satisfaz (eq2). Portanto $A = 1$.

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} \Rightarrow \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}.$$

Questão 3.51 (CN-2011) - Resposta Alternativa B

Resolução 01: Podemos montar a seguinte equação:

$$\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{26 - \sqrt{3 \cdot 15^2}} = \sqrt[3]{26 - \sqrt{675}}$$

$$4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{A^2 - B} \right) - A = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{26^2 - 675} \right) - 26 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{676 - 675} \right) - 26 = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{1} \right) - 26 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot 1 - 26 = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m - 26 = 0.$$

Usando o teorema do fator (*), note que a única raiz real dessa equação $4m^3 - 3m - 26 = 0$ é 2, ou seja $m = 2$. Assim, substituindo na outra expressão temos:

$$n = m^2 - 3\sqrt{(26^2 - 675)} \Rightarrow n = 2^2 - 3\sqrt{1} \Rightarrow n = 4 - 1 \Rightarrow n = 3.$$

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = m - \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

(*) Veja o teorema do fator no capítulo de Fatoração.

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(A - \sqrt{B})^3} \Rightarrow (A^2 + 3B)A - (3A^2 + B)\sqrt{B} = 26 - 15\sqrt{3}.$$

Por comparação, temos:

$$B = 3 \Rightarrow 3A^2 + B = 15 \Rightarrow 3A^2 + 3 = 15 \Rightarrow 3A^2 = 15 - 3$$

$$\Rightarrow 3A^2 = 12 \Rightarrow A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2 \text{ (eq1) e}$$

$$(A^2 + 3B)A = 26 \Rightarrow (A^2 + 3 \cdot 3)A = 26 \Rightarrow A^3 + 9A = 26 \text{ (eq2)}$$

Note que $A = -2$ não satisfaz (eq2). Portanto $A = 2$.

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3} \Rightarrow \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Questão 3.52 (Stanford-2008)

Resolução 01: Podemos montar a seguinte equação:

$$E = \sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7} + 45}{4}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{45}{4} + \frac{17\sqrt{7}}{4}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{45}{4} + \sqrt{7} \cdot \left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{45}{4} + \sqrt{7 \cdot \frac{289}{16}}} \Rightarrow E = \sqrt[3]{\frac{45}{4} + \sqrt{\frac{2023}{16}}}$$

$$4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{A^2 - B}\right) - A = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2025}{16} - \frac{2023}{16}}\right) - \frac{45}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2}{16}}\right) - \frac{45}{4} = 0 \Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right) - \frac{45}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 - 3m \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{45}{4} = 0 \Rightarrow 16m^3 - 6m - 45 = 0.$$

Usando o teorema do fator (*), note que a única raiz real dessa equação $16m^3 - 6m - 45 = 0$ é $\frac{3}{2}$, ou seja $m = \frac{3}{2}$. Assim, substituindo na outra expressão temos:

$$n = m^2 - 3\left(\frac{45}{4}\right) - \frac{2023}{16} \Rightarrow n = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\sqrt{\frac{2}{16}} \Rightarrow n = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{9-2}{4} \therefore n = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = m + \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7} + 45}{4}} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}} \therefore \sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7} + 45}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

(*) Veja o teorema do fator no capítulo de Fatoração.

Resolução 02: Podemos escrever:

$$\sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7} + 45}{4}} = \sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7}}{4} + \frac{45}{4}} = \sqrt[3]{\frac{45}{4} + \frac{17}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})^3}$$

$$\Rightarrow (A^2 + 3B)A + (3A^2 + B)\sqrt{B} = \frac{45}{4} + \frac{17}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Por comparação, temos:

$$B = \frac{7}{4} \Rightarrow 3A^2 + B = \frac{17}{2} \Rightarrow 3A^2 + \frac{7}{4} = \frac{17}{2} \Rightarrow 3A^2 = \frac{17}{2} - \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow 3A^2 = \frac{34-7}{4} \Rightarrow 3A^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow A^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow A = \pm \frac{3}{2} \text{ (eq1) e}$$

$$(A^2 + 3B)A = \frac{45}{4} \Rightarrow \left(A^2 + 3 \cdot \frac{7}{4}\right)A = \frac{45}{4} \Rightarrow 4A^3 + 21A = 45 \text{ (eq2)}$$

Note que $A = -\frac{3}{2}$ não satisfaz (eq2). Portanto $A = \frac{3}{2}$.

$$\text{Logo: } \sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7} + 45}{4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}}\right)^3} \therefore \sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7} + 45}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Capítulo 04 – Expressões Algébricas

Questão 4.1 (CN-1952)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$(x^2 - 5x + 9)(x + 3) = x^3 - 5x^2 + 9x + 3x^2 - 15x + 27$$

$$\therefore (x^2 - 5x + 9)(x + 3) = x^3 - 2x^2 - 6x + 27.$$

Questão 4.2 (CN-1952)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\sqrt{16x^3y} - \sqrt{25xy^3} - (x - 5y) \cdot \sqrt{xy} = 4x\sqrt{xy} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{xy} + 5y\sqrt{xy}$$

$$\therefore \sqrt{16x^3y} - \sqrt{25xy^3} - (x - 5y) \cdot \sqrt{xy} = 3x\sqrt{xy}.$$

Capítulo 05 – Produtos Notáveis

Questão 5.1 (Noruega-1999)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\frac{777^2 - 66^2}{777 + 66} = \frac{(777 - 66)(777 + 66)}{777 + 66} \Rightarrow \frac{777^2 - 66^2}{777 + 66} = 777 - 66$$

$$\therefore \frac{777^2 - 66^2}{777 + 66} = 711.$$

Questão 5.2 (Noruega-1999)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$x^2y + xy^2 + x + y = 63 \Rightarrow xy(x + y) + (x + y) = 63 \Rightarrow (x + y)(xy + 1) = 63$$

$$\Rightarrow (x + y)(6 + 1) = 63 \Rightarrow 7(x + y) = 63 \Rightarrow x + y = \frac{63}{7} \therefore \boxed{x + y = 9}.$$

Então, podemos escrever:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 9^2 - 2 \cdot 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = 81 - 12$$

$$\therefore \boxed{x^2 + y^2 = 69}.$$

Questão 5.3 (Noruega-1998)

Resolução: Do enunciado, podemos escrever:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = 31 - 2 \cdot 3 \Rightarrow (a-b)^2 = 31 - 6 \\ \Rightarrow (a-b)^2 = 25 \Rightarrow a-b = \pm\sqrt{25} \therefore a-b = \pm 5.$$

Como $a \geq b \Rightarrow a-b \geq 0$, temos: $a-b = 5$.

Questão 5.4 (Harvard-MIT-2012)

Resolução: Elevando $2a + 3b = 10$ ao quadrado, temos:

$$2a + 3b = 10 \Rightarrow (2a + 3b)^2 = 10^2 \Rightarrow 4a^2 + 12ab + 9b^2 = 100 \\ \Rightarrow 20 + 12ab = 100 \Rightarrow 12ab = 100 - 20 \Rightarrow 12ab = 80 \\ \Rightarrow ab = \frac{80}{12} \Rightarrow ab = \frac{20}{3}.$$

Questão 5.5 (AHSM-1958) - Resposta: Alternativa C.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = a \Rightarrow \frac{(x+y)^2 - 2xy}{(xy)^2} = a \Rightarrow \frac{(x+y)^2 - 2b}{(b)^2} = a \\ \Rightarrow (x+y)^2 - 2b = ab^2 \Rightarrow (x+y)^2 = ab^2 + 2b \therefore (x+y)^2 = b(ab+2).$$

Questão 5.6 (Noruega-1998)

Resolução: Note que:

$$9991 = 10000 - 9 \Rightarrow 9991 = 100^2 - 3^2 \Rightarrow 9991 = (100-3)(100+3) \\ \therefore 9991 = 97 \cdot 103.$$

Observe que 97 e 103 são primos. Como p é o maior, temos $p = 103$, assim a soma dos algarismos de p é $1 + 0 + 3 = 4$.

Questão 5.7 (Putnam-2001-Modificada)

Resolução: Note que:

$$x^4 - (2n-4)x^2 + (n-2)^2 = \underbrace{(x^2)^2}_{a^2} - 2 \cdot \underbrace{(n-2)}_b \cdot \underbrace{x^2}_a + \underbrace{(n-2)^2}_{b^2}$$

$$\Rightarrow x^4 - (2n-4)x^2 + (n-2)^2 = \left[\underbrace{x^2}_a - \underbrace{(n-2)}_b \right]^2$$

$$\therefore x^4 - (2n-4)x^2 + (n-2)^2 = (x^2 - n + 2)^2.$$

Questão 5.8

Resolução: Note que:

$$E_1 = \sqrt{x+2+2\sqrt{2x}} \Rightarrow E_1 = \sqrt{\underbrace{x}_{(\sqrt{x})^2} + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_b \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_a + \underbrace{(\sqrt{2})^2}_{(\sqrt{2})^2}} \Rightarrow E_1 = \sqrt{\left[\underbrace{\sqrt{x}}_a + \underbrace{\sqrt{2}}_b \right]^2}$$

$$\therefore \sqrt{x+2+2\sqrt{2x}} = |\sqrt{x} + \sqrt{2}|.$$

$$E_2 = \sqrt{11+3\sqrt{8}} \Rightarrow E_2 = \sqrt{11+3 \cdot 2\sqrt{2}} \Rightarrow E_2 = \sqrt{9+3 \cdot 2\sqrt{2}+2} \Rightarrow$$

$$E_2 = \sqrt{\underbrace{9}_{(3)^2} + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_b \cdot \underbrace{3}_a + \underbrace{(\sqrt{2})^2}_{(\sqrt{2})^2}} \Rightarrow E_2 = \sqrt{\left[\underbrace{3}_a + \underbrace{\sqrt{2}}_b \right]^2} \therefore \sqrt{11+3\sqrt{8}} = |3 + \sqrt{2}|.$$

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{2x}} = \sqrt{11+3\sqrt{8}} \Rightarrow |\sqrt{x} + \sqrt{2}| = |3 + \sqrt{2}|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{2} = -(3 + \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{2} = -3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 9 \\ \sqrt{x} = -3 - 2\sqrt{2} < 0 \text{ (não serve)}. \end{cases}$$

Resposta: $x = 9$.

Questão 5.9 (AHSME-1955) - Resposta: Alternativa B.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$r+s = -\frac{b}{a} \Rightarrow r+s = -\frac{(-p)}{1} \Rightarrow r+s = p; \quad rs = \frac{c}{a} \Rightarrow rs = \frac{q}{1} \Rightarrow rs = q.$$

Então, podemos escrever:

$$r^2 + s^2 = (r+s)^2 - 2rs \therefore r^2 + s^2 = p^2 - 2q.$$

Questão 5.10 (Singapura-2014)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{1}{3}; \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{-1}{3} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{1}{3}.$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}} \\ &\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{1+6}{9}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{3}{1}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{21}{9} \cdot \left(\frac{3}{1}\right) \therefore \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Questão 5.11 (AHSME-1951) - Resposta: Alternativa D.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$r + s = -\frac{b}{a}; \quad r \cdot s = \frac{c}{a}.$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} &= \frac{r^2 + s^2}{r^2 s^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{(r + s)^2 - 2rs}{(rs)^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \\ &\therefore \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}. \end{aligned}$$

Questão 5.12 (Hungria)**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (ad - bc)^2 = (1)(1) \Rightarrow (ad - bc)^2 = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (ad - bc)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow ad - bc = \sqrt{\frac{1}{4}} \therefore ad - bc = \frac{1}{2}.$$

Questão 5.13 (Harvard/MIT-2008)**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$(ac + bd)^2 + (ab - cd)^2 = (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 + (ab)^2 - 2ab cd + (cd)^2$$

$$(ac + bd)^2 + (ab - cd)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + (ab)^2 + (cd)^2$$

$$(ac + bd)^2 + (ab - cd)^2 = c^2(a^2 + d^2) + b^2(d^2 + a^2)$$

$$(ac + bd)^2 + (ab - cd)^2 = (a^2 + d^2)(c^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (ab - cd)^2 = (1)(1) \Rightarrow (ab - cd)^2 = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow (ab - cd)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow ab - cd = \sqrt{\frac{8}{9}} \therefore ab - cd = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Questão 5.14 (Eötvös-1933)**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$(ac + bd)^2 + (ab - cd)^2 = (a^2 + d^2)(c^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow 0^2 + (ab - cd)^2 = (1)(1) \Rightarrow (ab - cd)^2 = 1 \therefore ab - cd = 1.$$

Questão 5.15 (Índia-1998-Modificada)**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$E = (ac + 3bd)^2 + 3(ad - bc)^2$$

$$\Rightarrow E = (ac)^2 + 2ac \cdot 3bd + (3bd)^2 + 3[(ad)^2 - 2ad \cdot bc + (bc)^2]$$

$$\Rightarrow E = (ac)^2 + 6acbd + 9(bd)^2 + 3(ad)^2 - 6adbc + 3(bc)^2$$

$$\Rightarrow E = \underline{(ac)^2} + 9(bd)^2 + \underline{3(ad)^2} + 3(bc)^2$$

$$\Rightarrow E = a^2(c^2 + 3d^2) + 3b^2(3d^2 + c^2)$$

$$\therefore (ac + 3bd)^2 + 3(ad - bc)^2 = (a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2).$$

Questão 5.16 (Hong Kong-2002)

Resolução: Podemos escrever:

$$(ac + 5bd)^2 + 5(ad - bc)^2 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$$

$$(x_1y_1 + 5x_2y_2)^2 + 5(x_2y_1 - x_1y_2)^2 = (x_1^2 + 5x_2^2)(y_1^2 + 5y_2^2)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{105})^2 + 5(5)^2 = (10)(y_1^2 + 5y_2^2) \Rightarrow 10(y_1^2 + 5y_2^2) = 105 + 125$$

$$\Rightarrow 10(y_1^2 + 5y_2^2) = 230 \Rightarrow y_1^2 + 5y_2^2 = \frac{230}{10} \therefore y_1^2 + 5y_2^2 = 23.$$

Questão 5.17 (Eslovênia-2010/ Kosovo-2013)

Resolução: Tirando o MMC, temos que:

$$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 6 \Rightarrow \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = 6 \Rightarrow \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} = 2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = 3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 3(a^2 - b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = 3a^2 - 3b^2 \Rightarrow 3b^2 + b^2 = 3a^2 - a^2$$

$$\Rightarrow 4b^2 = 2a^2 \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{8b^6 = a^6}.$$

Assim, chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \Rightarrow E = \frac{(a^3 + b^3)^2 + (a^3 - b^3)^2}{(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)} \Rightarrow E = \frac{2(a^6 + b^6)}{a^6 - b^6}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2(8b^6 + b^6)}{8b^6 - b^6} \Rightarrow E = \frac{2 \cdot (9b^6)}{7b^6} \therefore \boxed{\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} = \frac{18}{7}}.$$

Questão 5.18 (Júnior Balkan-1997)

Resolução: Tirando o MMC, temos que:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k \Rightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} = k \Rightarrow \frac{2(x^4 + y^4)}{x^4 - y^4} = k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^4 + y^4}{x^4 - y^4} = \frac{k}{2} &\Rightarrow \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} = \frac{2}{k} \\ \Rightarrow \frac{x^4 + y^4}{x^4 - y^4} + \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} &= \frac{k}{2} + \frac{2}{k} \Rightarrow \frac{(x^4 + y^4)^2 + (x^4 - y^4)^2}{(x^4 - y^4)(x^4 + y^4)} = \frac{k^2 + 4}{2k} \\ \Rightarrow \frac{2(x^8 + y^8)}{x^8 - y^8} &= \frac{k^2 + 4}{2k} \Rightarrow \frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} = \frac{k^2 + 4}{4k} \Rightarrow \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} = \frac{4k}{k^2 + 4} \end{aligned}$$

Assim, chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} \Rightarrow E = \frac{k^2 + 4}{4k} + \frac{4k}{k^2 + 4} \Rightarrow E = \frac{(k^2 + 4)^2 + (4k)^2}{4k(k^2 + 4)} \\ \Rightarrow E &= \frac{k^4 + 8k^2 + 16 + 16k^2}{4k^3 + 16k} \Rightarrow \frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} = \frac{k^4 + 24k^2 + 16}{4k^3 + 16k} \end{aligned}$$

Questão 5.19 (CN-1954)

Resolução: Usando o produto da soma pela diferença, temos que:

$$\begin{aligned} E &= 16x^4 - 1 \Rightarrow E = (4x^2)^2 - 1^2 \Rightarrow E = (4x^2 + 1)(4x^2 - 1) \\ \Rightarrow E &= (4x^2 + 1)((2x)^2 - 1) \therefore 16x^4 - 1 = (4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1). \end{aligned}$$

Questão 5.20 (Harvard-MIT-2009)

Resolução: Usando o produto da soma pela diferença, temos que:

$$\begin{aligned} E &= 11^2 - 1^2 + 12^2 - 2^2 + 13^2 - 3^2 + \dots + 20^2 - 10^2 \\ \Rightarrow E &= (11+1)(11-1) + (12+2)(12-2) + \dots + (20+10)(20-10) \\ \Rightarrow E &= (12) \cdot (10) + (14) \cdot (10) + \dots + (30) \cdot (10) \\ \Rightarrow E &= 120 + 140 + 160 + \dots + 300 \therefore E = 2100. \end{aligned}$$

Questão 5.21 (Turquia-2007-Modificada)

Resolução: Usando o produto da soma pela diferença, temos que:

$$\begin{aligned} E &= (100^2 - 99^2)(99^2 - 98^2) \dots (3^2 - 2^2)(2^2 - 1^2) \\ \Rightarrow E &= (100+99)(100-99)(99+98)(99-98) \dots (2+1)(2-1) \\ \Rightarrow E &= (199) \cdot (1) \cdot (197) \cdot (1) \dots (3) \cdot (1) \therefore E = 199 \cdot 197 \cdot 195 \cdot \dots \cdot 3. \end{aligned}$$

Questão 5.22 (OCM-1998-Modificada)

Resolução: Usando o produto da soma pela diferença, temos que:

$$E = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 1998^2 + 1999^2$$

$$\Rightarrow E = 1^2 + (-2^2 + 3^2) + (-4^2 + 5^2) - 6^2 + \dots + (-1998^2 + 1999^2) \Rightarrow$$

$$E = 1^2 + (3+2)(3-2) + (5+4)(5-4) + \dots + (1999+1998)(1999-1998)$$

$$\Rightarrow E = 1 + (5) \cdot (1) + (9) \cdot (1) + \dots + (3997) \cdot (1) \Rightarrow E = 1 + 5 + 9 + \dots + 3997$$

$$\therefore E = 5\,993\,002.$$

Questão 5.23 (Moscou 1945)

Resolução: Usando a generalização do produto da soma pela diferença, temos que:

$$a^{2^7} - b^{2^7} = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{2^6}+b^{2^6})$$

$$\therefore \frac{a^{2^7} - b^{2^7}}{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{2^6}+b^{2^6})} = \boxed{a-b}.$$

Questão 5.24 (Moscou 1945)

Resolução: Usando a generalização do produto pela soma, temos que:

$$a^{2^k} - b^{2^k} = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})$$

$$\therefore \frac{a^{2^k} - b^{2^k}}{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})} = \boxed{a-b}.$$

Questão 2.25 (Moscou 1946)

Resolução: Podemos escrever de modo a obtermos o produto da soma pela diferença, logo:

$$E = (1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}+x^{100}) \cdot (1+x+x^2+\dots+x^{99}+x^{100})$$

$$E = [(1+x^2+\dots+x^{100}) + (-x-\dots-x^{99})] \cdot [(1+x^2+\dots+x^{100}) + (x+\dots+x^{99})]$$

$$E = [(1+x^2+\dots+x^{100}) - (x+\dots+x^{99})] \cdot [(1+x^2+\dots+x^{100}) + (x+\dots+x^{99})]$$

$$\Rightarrow E = (1+x^2+\dots+x^{100})^2 - (x+x^3+\dots+x^{99})^2$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E &= \left[\frac{1 \cdot (x^{102} - 1)}{x^2 - 1} \right]^2 - \left[\frac{x(x^{100} - 1)}{x^2 - 1} \right]^2 \Rightarrow E = \left[\frac{(x^{102} - 1)}{x^2 - 1} \right]^2 - \left[\frac{(x^{101} - x)}{x^2 - 1} \right]^2 \\
 \Rightarrow E &= \frac{(x^{102} - 1)^2}{(x^2 - 1)^2} - \frac{(x^{101} - x)^2}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow E = \frac{(x^{102} - 1)^2 - (x^{101} - x)^2}{(x^2 - 1)^2} \\
 \Rightarrow E &= \frac{(x^{102} - 1 + x^{101} - x)(x^{102} - 1 - x^{101} + x)}{(x^2 - 1)^2} \\
 \Rightarrow E &= \frac{[x^{101}(x+1) - (x+1)][x^{101}(x-1) + (x-1)]}{(x^2 - 1)^2} \\
 \Rightarrow E &= \frac{(x+1)(x-1)[x^{101} - 1][x^{101} + 1]}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow E = \frac{(x^{101} - 1)(x^{101} + 1)}{x^2 - 1} \Rightarrow \\
 E &= \frac{(x^{202} - 1)}{x^2 - 1} \Rightarrow E = \frac{(x^2)^{101} - 1}{x^2 - 1} \Rightarrow E = \frac{(x^2 - 1)[(x^2)^{100} + (x^2)^{99} + \dots + (x^2)^1]}{x^2 - 1} \\
 \therefore E &= \boxed{x^{200} + x^{198} + \dots + x^2}.
 \end{aligned}$$

Questão 5.26 (CN-2005) - Resposta: Alternativa A.

Resolução: Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{a^4 + b^4 - 6a^2b^2}{a^2 - b^2 + 2ab} \Rightarrow E = \frac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 4a^2b^2}{a^2 - b^2 + 2ab} \Rightarrow E = \frac{(a^2 - b^2)^2 - (2ab)^2}{a^2 - b^2 + 2ab} \\
 \Rightarrow E &= \frac{(a^2 - b^2 + 2ab)(a^2 - b^2 - 2ab)}{a^2 - b^2 + 2ab} \therefore \frac{a^4 + b^4 - 6a^2b^2}{a^2 - b^2 + 2ab} = a^2 - b^2 - 2ab.
 \end{aligned}$$

Questão 5.27 (AHSME-1951 / CN-1998) - Resposta: Alternativa A.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 1}{2x^2} \right)^2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow E = \sqrt{1 + \frac{x^8 - 2x^4 + 1}{4x^4}} - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\frac{4x^4 + x^8 - 2x^4 + 1}{4x^4}} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow E = \sqrt{\frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4}} - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\left(\frac{x^4 + 1}{2x^2}\right)^2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow E = \frac{x^4 + 1}{2x^2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow E = \frac{x^4 + 1 - x^4}{2x^2} \therefore E = \frac{1}{2x^2}.$$

Questão 5.28

Resolução: Podemos escrever:

$$E = (a+b-c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 - 2[(c-a-b)^2 - d^2]$$

$$\Rightarrow E = (a+b-c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 - 2[c-a-b+d][c-a-b-d]$$

$$\Rightarrow E = (a+b-c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 - 2(a+b-c-d)(a+b-c+d)$$

$$\Rightarrow E = [(a+b-c+d) - (a+b-c-d)]^2$$

$$\Rightarrow E = [a+b-c+d-a-b+c+d]^2 \Rightarrow E = [2d]^2 \therefore E = 4d^2.$$

Questão 5.29

Resolução: Note que:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \text{ e } (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$E = (a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^{12}+a^6b^6+b^{12})$$

$$\Rightarrow E = (a^3+b^3)(a^3-b^3)\left[(a^6)^2+a^6b^6+(b^6)^2\right] \Rightarrow$$

$$E = (a^6-b^6)\left[(a^6)^2+a^6b^6+(b^6)^2\right] \Rightarrow E = (a^6)^3-(b^6)^3 \therefore E = a^{18}-b^{18}.$$

Questão 5.30 (CN-1991) - Resposta: Alternativa A.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{(a^2-b^2-c^2-2bc)(a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)} \Rightarrow E = \frac{[a^2-(b^2+c^2+2bc)](a+b-c)}{(a+b+c)[(a-c)^2-b^2]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{[a^2-(b+c)^2](a+b-c)}{(a+b+c)(a-c+b)(a-c-b)} \Rightarrow E = \frac{(a+b+c)(a-b-c)}{(a+b+c)(a-c-b)} \therefore \boxed{E=1}.$$

Questão 5.31 (Harvard-MIT-2007)

Resolução: Podemos escrever:

$$x^3 - y^3 = 28 \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 28 \Rightarrow 4(x^2 + xy + y^2) = 28$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 7 \quad \therefore \boxed{x^2 + y^2 = 7 - xy}.$$

Assim, elevando a primeira equação ao quadrado, temos:

$$(x - y)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 16 \Rightarrow 7 - xy - 2xy = 16 \Rightarrow 7 - 16 = 3xy$$

$$\Rightarrow 3xy = -9 \Rightarrow xy = -3 \quad \therefore \boxed{xy = -3}.$$

Questão 5.32 (CN-2006) - Resposta: Alternativa D.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{x(x^2 + x - y) + y^2(y + 1)}{x^2 + y^2 - xy} \Rightarrow E = \frac{\overline{x^3} + x^2 - xy + \overline{y^3} + y^2}{x^2 + y^2 - xy} \Rightarrow$$

$$E = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2) + x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 - xy} \Rightarrow E = \frac{(x^2 - xy + y^2)[(x + y) + 1]}{x^2 + y^2 - xy}$$

$$\therefore E = x + y + 1.$$

Questão 5.33 (CN-1980) - Resposta: Alternativa B.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{(2x^2 - 4x + 8)(x^2 - 4)}{\sqrt{2} \cdot x^3 + \sqrt{128}} \Rightarrow E = \frac{2(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x + 2)}{\sqrt{2} \cdot x^3 + 8\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x + 2)}{\sqrt{2} \cdot (x^3 + 8)} \Rightarrow E = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{(x^2 - 2x + 4)}(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)} \cdot \cancel{(x^2 - x - 2 + 2^2)}}$$

$$\therefore E = \sqrt{2} \cdot (x - 2).$$

Questão 5.34 (CN-1983) - Resposta: Alternativa B.

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{(x^2z + zy^2 + 2xyz)(x^2 - y^2)}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3} \Rightarrow E = \frac{z(x + y)^2(x - y)(x + y)}{(x + y)^3} \therefore E = z \cdot (x - y).$$

Questão 5.35**Resolução:** Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{(a+b)^2 - 4(a^2 + b^2)}{(a^3 + b^3)^2 - (a^2 + b^2)^3} \Rightarrow E = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4a^2 - 4b^2}{a^6 + 2a^3b^3 + b^6 - (a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6)} \\
 \Rightarrow E &= \frac{2ab - 3a^2 - 3b^2}{2a^3b^3 - 3a^4b^2 - 3a^2b^4} \Rightarrow E = \frac{2ab - 3a^2 - 3b^2}{2a^3b^3 - 3a^4b^2 - 3a^2b^4} \\
 \Rightarrow E &= \frac{2ab - 3a^2 - 3b^2}{a^2b^2(2ab - 3a^2 - 3b^2)} \therefore E = \frac{1}{a^2b^2}.
 \end{aligned}$$

Questão 5.36 (AHSME-1951) - Resposta: Alternativa C.**Resolução:** Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= \left[\frac{(x+1)^2 \cdot (x^2 - x + 1)^2}{(x^3 + 1)^2} \right]^2 \cdot \left[\frac{(x-1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)^2}{(x^3 - 1)^2} \right]^2 \\
 \Rightarrow E &= \left[\frac{(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)}{(x^3 + 1)} \right]^2 \cdot \left[\frac{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)}{(x^3 - 1)} \right]^2 \\
 \Rightarrow E &= \left[\frac{(x^3 - 1)^2}{(x^3 + 1)^2} \right]^2 \cdot \left[\frac{(x^3 + 1)^2}{(x^3 - 1)^2} \right]^2 \Rightarrow E = \frac{(x^3 - 1)^4}{(x^3 + 1)^4} \cdot \frac{(x^3 + 1)^4}{(x^3 - 1)^4} \therefore \boxed{E=1}.
 \end{aligned}$$

Questão 5.37**Resolução:** Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E &= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a(a^2 - b^2) - b(a^2 - b^2) = \\
 &= (a-b)(a^2 - b^2) = (a-b)(a-b)(a+b) \therefore E = (a+b)(a-b)^2.
 \end{aligned}$$

Questão 5.38 (Harvard/MIT-2000)**Resolução:** Usando o resultado anterior para $a = 2000$ e $b = 1999$, temos:

$$\begin{aligned}
 2000^3 - 1999 \cdot 2000^2 - 1999^2 \cdot 2000 + 1999^3 &= (2000 + 1999) \cdot (2000 - 1999)^2 \\
 &= 3999 \cdot 1^2 = 3999.
 \end{aligned}$$

Questão 5.39 (Harvard/MIT-2007)**Resolução:** Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{a^3-1}{a^3+1} &= \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)} \Rightarrow \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \frac{6^3-1}{6^3+1} = \\ &= \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)} \cdot \frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)} \cdot \frac{(4-1)(4^2+4+1)}{(4+1)(4^2-4+1)} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(5-1)(5^2+5+1)}{(5+1)(5^2-5+1)} \cdot \frac{(6-1)(6^2+6+1)}{(6+1)(6^2-6+1)} = \\ \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \frac{6^3-1}{6^3+1} &= \frac{\boxed{1} \cdot \cancel{X} \cdot \cancel{X} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{X} \cdot \cancel{21} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \boxed{5} \cdot 43}{\boxed{3} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{X} \cdot \boxed{5} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{21} \cdot \boxed{7} \cdot \cancel{3}} \end{aligned}$$

Note que esses primeiros termos (destacados) se cancelam, sobrando o 3 e o 7 no denominador.

Por outro lado, os termos não destacados também se cancelam, sobrando o 43 no numerador e o 3 no denominador. Assim, temos:

$$\therefore \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \frac{6^3-1}{6^3+1} = \frac{43}{3 \cdot 7} = \boxed{\frac{43}{63}}.$$

Questão 5.40 (Stanford-2012)**Resolução:** Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{a^3-1}{a^3+1} &= \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)} \Rightarrow \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{16^3-1}{16^3+1} = \\ &= \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)} \cdot \frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)} \cdot \frac{(4-1)(4^2+4+1)}{(4+1)(4^2-4+1)} \cdot \dots \\ &\quad \cdot \frac{(14-1)(14^2+14+1)}{(14+1)(14^2-14+1)} \cdot \frac{(15-1)(15^2+15+1)}{(15+1)(15^2-15+1)} \cdot \frac{(16-1)(16^2+16+1)}{(16+1)(16^2-16+1)} \\ &\Rightarrow \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{16^3-1}{16^3+1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\boxed{1} \cdot \cancel{X} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{13} \cdot \boxed{18} \cdot \cancel{21} \cdot \dots \cdot \boxed{13} \cdot \cancel{24} \cdot \boxed{14} \cdot \cancel{241} \cdot \boxed{18} \cdot 273}{\cancel{18} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{X} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{13} \cdot \dots \cdot \cancel{16} \cdot 183 \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{24} \cdot \cancel{17} \cdot 241}$$

Note que esses primeiros termos (destacados) se cancelam, sobrando o 2 no numerador e o produto $16 \cdot 17$ no denominador.

Por outro lado, os termos não destacados também se cancelam, sobrando o 273 no numerador e o 3 no denominador. Assim, temos:

$$\therefore \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{16^3 - 1}{16^3 + 1} = \frac{1 \cdot \cancel{X} \cdot \overbrace{273}^{91}}{\underbrace{\cancel{16} \cdot 17}_8 \cdot \underbrace{3}_1} = \boxed{\frac{91}{136}}$$

Questão 5.41

Resolução: Do trinômio quadrado perfeito, temos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 = k + 2x \Rightarrow (a+b)^4 = (k+2x)^2$$

$$\therefore \boxed{(a+b)^4 = k^2 + 4kx + 4x^2}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow (a-b)^2 = k - 2x \Rightarrow (a-b)^4 = (k-2x)^2$$

$$\therefore \boxed{(a-b)^4 = k^2 - 4kx + 4x^2}$$

Questão 5.42

Resolução: Elevando ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 = 1^2 &\Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1 \Rightarrow 2x^2y^2 + \frac{17}{18} = 1 \Rightarrow 2x^2y^2 = 1 - \frac{17}{18} \\ \Rightarrow 2x^2y^2 = \frac{1}{18} &\Rightarrow x^2y^2 = \frac{1}{36} \therefore xy = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Questão 5.43

Resolução: Tirando o MMC, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k &\Rightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} = k \Rightarrow \frac{2(x^4 + y^4)}{x^4 - y^4} = k \Rightarrow \\ 2(x^4 + y^4) &= k(x^4 - y^4) \Rightarrow 2x^4 + 2y^4 = kx^4 - ky^4 \Rightarrow ky^4 + 2y^4 = kx^4 - 2x^4 \\ \Rightarrow (k+2)y^4 &= (k-2)x^4 \Rightarrow y^4 = \left(\frac{k-2}{k+2}\right)x^4 \Rightarrow \boxed{y^{16} = \left(\frac{k-2}{k+2}\right)^4 x^{16}} \end{aligned}$$

Assim, chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} \Rightarrow E = \frac{(x^8 + y^8)^2 + (x^8 - y^8)^2}{(x^8 - y^8)(x^8 + y^8)} \Rightarrow E = \frac{2(x^{16} + y^{16})}{x^{16} - y^{16}} \\
 \Rightarrow E &= \frac{2 \left(x^{16} + \left(\frac{k-2}{k+2} \right)^4 x^{16} \right)}{x^{16} - \left(\frac{k-2}{k+2} \right)^4 x^{16}} \Rightarrow E = \frac{2 \cdot \left[\frac{(k+2)^4 x^{16} + (k-2)^4 x^{16}}{(k+2)^4} \right]}{\left[\frac{(k+2)^4 x^{16} - (k-2)^4 x^{16}}{(k+2)^4} \right]} \\
 \Rightarrow E &= \frac{2 \cdot \left[(k+2)^4 + (k-2)^4 \right]}{\left[(k+2)^4 - (k-2)^4 \right]} \Rightarrow E = \frac{2 \cdot \left[2 \cdot (2^2 + k^2)^2 + 8 \cdot 2^2 \cdot k^2 \right]}{8 \cdot 2 \cdot k \cdot (2^2 + k^2)} \\
 \Rightarrow E &= \frac{2 \cdot \left[2 \cdot (4 + k^2)^2 + 32k^2 \right]}{16k(4 + k^2)} \Rightarrow E = \frac{4 \cdot \left[(16 + 8k^2 + k^4) + 16k^2 \right]}{16k \cdot (4 + k^2)} \\
 \Rightarrow E &= \frac{16 + 8k^2 + k^4 + 16k^2}{4k \cdot (4 + k^2)} \quad \therefore \frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} = \frac{k^4 + 24k^2 + 16}{4k^3 + 16k}
 \end{aligned}$$

Questão 5.44 (IMO-Longlist-1992-Adaptada)

Resolução: Fazendo $5^{25} = x$, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1} \Rightarrow E = \frac{5^{25 \cdot 5} - 1}{5^{25} - 1} \Rightarrow E = \frac{(5^{25})^5 - 1}{5^{25} - 1} \Rightarrow E = \frac{x^5 - 1}{x - 1} \\
 E &= \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 E &= (5^{25})^4 + (5^{25})^3 + (5^{25})^2 + 5^{25} + 1 \\
 \therefore \frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1} &= 5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1.
 \end{aligned}$$

Questão 5.45

Resolução: Multiplicando cada equação por $x + y$, temos:

$$ax + by = 2 \Rightarrow (ax + by)(x + y) = 2(x + y)$$

$$\Rightarrow ax^2 + axy + bxy + by^2 = 2(x + y) \Rightarrow 20 + (a + b)xy = 2(x + y).$$

$$ax^2 + by^2 = 20 \Rightarrow (ax^2 + by^2)(x + y) = 20(x + y) \Rightarrow$$

$$ax^3 + ax^2y + bxy^2 + by^3 = 20(x + y) \Rightarrow 56 + (ax + by)xy = 20(x + y)$$

$$\Rightarrow 56 + 2xy = 20(x + y) \Rightarrow \boxed{28 + xy = 10(x + y)}. \quad (\text{eq1})$$

$$ax^3 + by^3 = 56 \Rightarrow (ax^3 + by^3)(x + y) = 56(x + y) \Rightarrow$$

$$ax^4 + ax^3y + bxy^3 + by^4 = 56(x + y) \Rightarrow 272 + (ax^2 + by^2)xy = 56(x + y)$$

$$\Rightarrow 272 + 20xy = 56(x + y) \Rightarrow \boxed{68 + 5xy = 14(x + y)}. \quad (\text{eq2})$$

Resolvendo o sistema formado por (eq1) e (eq2), temos:

$$x + y = 2 \text{ e } xy = -8.$$

$$ax^4 + by^4 = 272 \Rightarrow (ax^4 + by^4)(x + y) = 272(x + y)$$

$$\Rightarrow ax^5 + ax^4y + bxy^4 + by^5 = 272 \cdot (x + y)$$

$$\Rightarrow ax^5 + by^5 + (ax^3 + by^3)xy = 272 \cdot (x + y)$$

$$\Rightarrow ax^5 + by^5 + 56 \cdot (-8) = 272 \cdot 2 \Rightarrow ax^5 + by^5 - 448 = 544$$

$$\Rightarrow ax^5 + by^5 = 544 + 448 \therefore \boxed{ax^5 + by^5 = 992}.$$

Questão 5.46 (AIME-1990/Harvard-MIT-2009)

Resolução: Multiplicando cada equação por $x + y$, temos:

$$ax + by = 3 \Rightarrow (ax + by)(x + y) = 3(x + y)$$

$$ax^2 + axy + bxy + by^2 = 3(x + y) \Rightarrow 7 + (a + b)xy = 3(x + y).$$

$$ax^2 + by^2 = 7 \Rightarrow (ax^2 + by^2)(x + y) = 7(x + y)$$

$$\Rightarrow ax^3 + ax^2y + bxy^2 + by^3 = 7(x + y) \Rightarrow 16 + (ax + by)xy = 7(x + y)$$

$$\Rightarrow \boxed{16 + 3xy = 7(x + y)}. \quad (\text{eq1})$$

$$ax^3 + by^3 = 16 \Rightarrow (ax^3 + by^3)(x + y) = 16(x + y) \Rightarrow$$

$$ax^4 + ax^3y + bxy^3 + by^4 = 16(x + y) \Rightarrow 42 + (ax^2 + by^2)xy = 16(x + y)$$

$$\Rightarrow \boxed{42 + 7xy = 16(x + y)}. \quad (\text{eq2})$$

Resolvendo o sistema formado por (eq1) e (eq2), temos:

$$x + y = -14 \text{ e } xy = -38.$$

$$ax^4 + by^4 = 42 \Rightarrow (ax^4 + by^4)(x + y) = 42(x + y)$$

$$\Rightarrow ax^5 + ax^4y + bxy^4 + by^5 = 42 \cdot (x + y)$$

$$\Rightarrow ax^5 + by^5 + (ax^3 + by^3)xy = 42 \cdot (x + y)$$

$$\Rightarrow ax^5 + by^5 + 16 \cdot (-38) = 42 \cdot (-14) \Rightarrow ax^5 + by^5 - 608 = -588$$

$$\Rightarrow ax^5 + by^5 = -544 + 608 \therefore \boxed{ax^5 + by^5 = 20}.$$

Questão 5.47 (OBM XXXI - 2ª Fase - Nível 2)

Resolução: Multiplicando cada equação por $x + y$, temos:

$$ax + by = 1 \Rightarrow (ax + by)(x + y) = x + y$$

$$\Rightarrow ax^2 + axy + bxy + by^2 = x + y \Rightarrow 2 + (a + b)xy = x + y.$$

$$ax^2 + by^2 = 2 \Rightarrow (ax^2 + by^2)(x + y) = 2(x + y)$$

$$\Rightarrow ax^3 + ax^2y + bxy^2 + by^3 = 2(x + y) \Rightarrow 5 + (ax + by)xy = 2(x + y)$$

$$\Rightarrow \boxed{5 + xy = 2(x + y)}. \quad (\text{eq1})$$

$$ax^3 + by^3 = 5 \Rightarrow (ax^3 + by^3)(x + y) = 5(x + y)$$

$$\Rightarrow ax^4 + ax^3y + bxy^3 + by^4 = 5(x + y) \Rightarrow 6 + (ax^2 + by^2)xy = 5(x + y)$$

$$\Rightarrow \boxed{6 + 2xy = 5(x + y)}. \quad (\text{eq2})$$

Resolvendo o sistema formado por (eq1) e (eq2), temos:

$$x + y = -4 \text{ e } xy = -13.$$

$$ax^4 + by^4 = 6 \Rightarrow (ax^4 + by^4)(x + y) = 6(x + y)$$

$$\Rightarrow ax^5 + ax^4y + bxy^4 + by^5 = 6 \cdot (x + y) \Rightarrow$$

$$ax^5 + by^5 + (ax^3 + by^3)xy = 6 \cdot (x + y) \Rightarrow ax^5 + by^5 + 5 \cdot (-13) = 6 \cdot (-4)$$

$$\Rightarrow ax^5 + by^5 - 65 = -24 \Rightarrow ax^5 + by^5 = -24 + 65 \therefore \boxed{ax^5 + by^5 = 41}.$$

Questão 5.48 (AMC-2007) - Resposta: Alternativa D.**Resolução:** Elevando ao quadrado duas vezes, temos:

$$\begin{aligned}
 a + a^{-1} = 4 &\Rightarrow (a + a^{-1})^2 = 4^2 \Rightarrow a^2 + 2a \cdot a^{-1} + a^{-2} = 16 \Rightarrow a^2 + a^{-2} = 16 - 2 \\
 &\Rightarrow a^2 + a^{-2} = 14 \Rightarrow (a^2 + a^{-2})^2 = 14^2 \Rightarrow a^4 + 2a^2 \cdot a^{-2} + a^{-4} = 196 \\
 &\Rightarrow a^4 + a^{-4} = 196 - 2 \therefore a^4 + a^{-4} = 194.
 \end{aligned}$$

Questão 5.49 (AHSME-1952-1954 / CN-1986) - Resposta: Alternativa C.**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3 &\Rightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}, x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (\sqrt{3})^3 \\
 &\Rightarrow x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \therefore \boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = 0}.
 \end{aligned}$$

Questão 5.50 (CN-2014) - Resposta: Alternativa E**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$\begin{aligned}
 x + \frac{3}{x} = 9 &\Rightarrow \left(x + \frac{3}{x}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 81 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = 81 - 6 \\
 &\Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = 75.
 \end{aligned}$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 &= x^2 + \frac{9}{x^2} - 2x \cdot \frac{3}{x} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 = 75 - 6 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 = 69 \\
 \therefore x - \frac{3}{x} &= \pm \sqrt{69}.
 \end{aligned}$$

Assim, a soma dos algarismos de $a = 6 + 9 = 15$.**Questão 5.51****Resolução:** Usando a forma prática, temos:

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k \Rightarrow m = 4^3 - 3 \cdot 4 \Rightarrow m = 64 - 12 \therefore m = 52.$$

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = k^4 - 4k^2 + 2 \Rightarrow n = 4^4 - 4 \cdot 4^2 + 2 \Rightarrow n = 256 - 64 + 2$$

$$\therefore n = 194.$$

Então, podemos escrever:

$$\frac{m+n}{m-n} = \frac{52+194}{52-194} \Rightarrow \frac{m+n}{m-n} = \frac{246}{-142} \therefore \boxed{\frac{m+n}{m-n} = -\frac{123}{71}}.$$

Questão 5.52 (AMC-2007) - Resposta: Alternativa D.

Resolução: Usando a forma prática, temos:

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = k^4 - 4k^2 + 2 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 4^4 - 4 \cdot 4^2 + 2$$

$$\Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 256 - 64 + 2 \therefore a^4 + \frac{1}{a^4} = 194.$$

Questão 5.53 (Stanford-2010)

Resolução: Usando a forma prática, temos:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2 \Rightarrow 7 = k^2 - 2 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm\sqrt{9} \therefore k = \pm 3.$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 5k \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = (\pm 3)^5 - 5 \cdot (\pm 3)^3 + 5 \cdot (\pm 3)$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = \pm 243 \mp 5 \cdot 27 \pm 15 \therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = \pm 123.$$

Questão 5.54

Resolução: Usando a forma prática, temos:

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 5k \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = (1)^5 - 5 \cdot (1)^3 + 5 \cdot (1) \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 1 - 5 + 5$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 1 \Rightarrow \sqrt[5]{x^5 + \frac{1}{x^5}} = \sqrt[5]{1} \therefore \sqrt[5]{x^5 + \frac{1}{x^5}} = 1.$$

Questão 5.55 (Singapura)

Resolução: Usando a forma prática, temos:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 4x \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 4 \therefore \boxed{x + \frac{1}{x} = 4}.$$

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = k^3 - 3k - k^3$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = -3k.$$

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = k^6 - 6k^4 + 9k^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 2 = k^6 - 6k^4 + 9k^2 - 2 - k^6 + 2$$

$$\therefore x^6 + \frac{1}{x^6} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 2 = -6k^4 + 9k^2.$$

Então, podemos escrever:

$$E = \frac{x^6 + \frac{1}{x^6} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 2}{x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^3} \Rightarrow E = \frac{-6k^4 + 9k^2}{-3k} \Rightarrow E = 2k^3 - 3k$$

$$\Rightarrow E = 2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4 \Rightarrow E = 128 - 12 \therefore \frac{x^6 + \frac{1}{x^6} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 2}{x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^3} = 116.$$

Questão 5.56

Resolução: Usando a forma prática, temos:

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (\sqrt{2})^3 - 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = -\sqrt{2}.$$

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = k^4 - 4k^2 + 2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 4 - 8 + 2 \therefore x^4 + \frac{1}{x^4} = -2.$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) &= (-\sqrt{2}) \cdot (-2) \Rightarrow x^7 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^7} = 2\sqrt{2} \\ \Rightarrow x^7 + \sqrt{2} + \frac{1}{x^7} &= 2\sqrt{2} \Rightarrow x^7 + \frac{1}{x^7} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ \therefore x^7 + \frac{1}{x^7} &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Questão 5.57

Resolução: Usando a forma prática, temos:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = k &\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k \Rightarrow \left(\sqrt[3]{r}\right)^3 + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{r}\right)^3} = 3^3 - 3 \cdot 3 \Rightarrow r + \frac{1}{r} = 27 - 9 \\ \therefore r + \frac{1}{r} &= 18. \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento, temos que:

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k &\Rightarrow r^3 + \frac{1}{r^3} = 18^3 - 3 \cdot 18 \Rightarrow r^3 + \frac{1}{r^3} = 5832 - 54 \\ \therefore r^3 + \frac{1}{r^3} &= 5778. \end{aligned}$$

Questão 5.58

Resolução: Tirando o MMC dos índices, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{r} - \frac{1}{\sqrt[4]{r}} = 14 &\Rightarrow \frac{\sqrt[12]{r^3}}{\sqrt[12]{r^3}} - \frac{1}{\sqrt[12]{r^3}} = 14 \Rightarrow \frac{\left(\sqrt[12]{r}\right)^3 - 1}{\left(\sqrt[12]{r}\right)^3} = 14 \\ \sqrt[6]{r} + \frac{1}{\sqrt[6]{r}} = 6 &\Rightarrow \frac{\sqrt[12]{r^2}}{\sqrt[12]{r^2}} + \frac{1}{\sqrt[12]{r^2}} = 6 \Rightarrow \frac{\left(\sqrt[12]{r}\right)^2 + 1}{\left(\sqrt[12]{r}\right)^2} = 6. \text{ (Prove)} \end{aligned}$$

Fazendo $\sqrt[12]{r} = x$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{r} - \frac{1}{\sqrt[4]{r}} = 14 &\Rightarrow \frac{\left(\sqrt[12]{r}\right)^3 - 1}{\left(\sqrt[12]{r}\right)^3} = 14 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 14 \\ \sqrt[6]{r} + \frac{1}{\sqrt[6]{r}} = 6 &\Rightarrow \frac{\left(\sqrt[12]{r}\right)^2 + 1}{\left(\sqrt[12]{r}\right)^2} = 6 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 6. \text{ (Prove)} \end{aligned}$$

Usando a forma prática, temos:

$$x - \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = k^3 + 3k \Rightarrow k^3 + 3k = 14 \Rightarrow k^3 + 3k - 14 = 0.$$

Por inspeção (teorema do fator), temos que $k = 2$, assim:

$$x - \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 2^2 + 2 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 6.$$

Como queríamos provar.

Observação: Veja o teorema do fator no capítulo de Fatoração!

Questão 5.59 (CN-1984) - Resposta: Alternativa E.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$x + y + z = 16 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 16^2 \therefore \boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 256}.$$

Então, podemos escrever:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{2xy + 2xz + 2yz + x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{256}{xyz} = \frac{8}{3} \Rightarrow 8xyz = 768 \Rightarrow xyz = \frac{768}{8} \therefore xyz = 96.$$

Questão 5.60 (CN-1999) - Resposta: Alternativa C.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$m + n + p = 6 \Rightarrow (m + n + p)^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2(mn + mp + np) = 36 \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2(11) = 36.$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = 36 - 22 \therefore \boxed{m^2 + n^2 + p^2 = 14}.$$

Então, podemos escrever:

$$\frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{mnp} \Rightarrow \frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn} = \frac{14}{2} \therefore \frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn} = 7.$$

Questão 5.61 (CN-2011) - Resposta: Alternativa C.**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} &= p \Rightarrow \frac{a+b+c}{abc} = p; \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = q \\ \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} &= q + \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} \\ \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot (a+b+c) + \frac{1}{b} \cdot (a+b+c) + \frac{1}{c} \cdot (a+b+c) &= q+1+1+1 \\ \Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= q+3 \Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(\frac{ab+ac+bc}{abc} \right) = q+3 \\ \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{abc} \right) \cdot (ab+ac+bc) &= q+3 \Rightarrow p \cdot r = q+3 \Rightarrow (pr)^2 = (q+3)^2 \\ \Rightarrow q^2 + 6q + 9 &= p^2 r^2 \therefore q^2 + 6q = p^2 r^2 - 9. \end{aligned}$$

Questão 5.62 (Harvard/MIT-2008)**Resolução:** Do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} p+q+r &= -\frac{b}{a} \Rightarrow p+q+r = -\frac{(-9)}{1} \Rightarrow \boxed{p+q+r=9}; \\ pq+pr+qr &= \frac{c}{a} \Rightarrow pq+pr+qr = \frac{8}{1} \Rightarrow \boxed{pq+pr+qr=8}; \\ pqr &= -\frac{d}{a} \Rightarrow pqr = -\frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{pqr=-2}; \end{aligned}$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} \Rightarrow E = \frac{p^2 q^2 + p^2 r^2 + q^2 r^2}{p^2 q^2 r^2} \Rightarrow \\ E &= \frac{(pq+pr+qr)^2 - 2pqr(p+q+r)}{(pqr)^2} \Rightarrow E = \frac{8^2 - 2 \cdot (-2) \cdot 9}{(-2)^2} \Rightarrow E = \frac{64+36}{4} \\ \Rightarrow E &= \frac{100}{4} \therefore \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = 25. \end{aligned}$$

Questão 5.63 (AHSME-1981) - Resposta: Alternativa A.**Resolução:** Podemos escrever:

$$E = (x+y+z)^{-1} (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}) (xy+yz+xz)^{-1} [(xy)^{-1} + (yz)^{-1} + (xz)^{-1}]$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{1}{x+y+z} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \cdot \left(\frac{1}{xy+yz+xz} \right) \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \right)$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{1}{x+y+z} \right) \cdot \left(\frac{xy+yz+xz}{xyz} \right) \cdot \left(\frac{1}{xy+yz+xz} \right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{xyz} \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \therefore E = x^{-2} \cdot y^{-2} \cdot z^{-2}.$$

Questão 5.64 (AHSME-1991) - Resposta: Alternativa C.

Resolução: Fazendo $a = x + \sqrt{x^2 - 1}$ e $b = x - \sqrt{x^2 - 1}$, temos:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} = 20 \\ ab = 1 \end{cases} \Rightarrow a + a = 20 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10.$$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 10 - x \Rightarrow x^2 - 1 = (10 - x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 10^2 - 20x + x^2 \Rightarrow 20x = 100 + 1 \therefore \boxed{x = \frac{101}{20}} \text{ ou } \boxed{x = 5,05}.$$

$$E = x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} \Rightarrow E = x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$$

$$\Rightarrow E = 2x^2 \Rightarrow E = 2(5,05)^2 \Rightarrow E = 2(25,5025) \therefore \boxed{E = 51,005}.$$

Questão 5.65

Resolução: Fazendo $\frac{5 + \sqrt{21}}{2} = x$, podemos escrever:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{5 + \sqrt{21}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{5 + \sqrt{21}} \cdot \frac{5 - \sqrt{21}}{5 - \sqrt{21}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2(5 - \sqrt{21})}{5^2 - (\sqrt{21})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2(5 - \sqrt{21})}{25 - 21} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2(5 - \sqrt{21})}{4} \therefore \frac{1}{x} = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}.$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} + \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{10}{2} \therefore \boxed{x + \frac{1}{x} = 5}.$$

Usando a forma prática, temos:

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 5k \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 5^5 - 5 \cdot 5^3 + 5 \cdot 5$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 3125 - 625 + 25 \therefore \boxed{x^5 + \frac{1}{x^5} = 2525}.$$

Questão 5.66

Resolução: Fazendo $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = x$, podemos escrever:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} \therefore \boxed{\frac{1}{x} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \therefore \boxed{x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}}$$

Usando a forma prática, temos:

$$x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 5k \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = (\sqrt{5})^5 - 5 \cdot (\sqrt{5})^3 + 5 \cdot \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 25\sqrt{5} - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{5} \therefore \boxed{x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right)^2 = (5\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^{10} + 2x^5 \cdot \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} = 125$$

$$\Rightarrow x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = 125 - 2 \therefore \boxed{x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = 123}$$

Questão 5.67 (CN-1998) - Resposta: Alternativa D.

Resolução: Note que:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} \Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{1997} = (2-\sqrt{3})^{1997}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{1997}} = (2-\sqrt{3})^{1997}}$$

Fazendo $(2+\sqrt{3})^{1997} = k$, podemos escrever:

$$x = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997} + (2-\sqrt{3})^{1997}}{2} \Rightarrow x = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} \Rightarrow 2x = k + \frac{1}{k}$$

$$y = \frac{(2 + \sqrt{3})^{1997} - (2 - \sqrt{3})^{1997}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{k - \frac{1}{k}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{y\sqrt{3} = k - \frac{1}{k}}.$$

$$4x^2 - 3y^2 = (2x)^2 - (y\sqrt{3})^2 \Rightarrow 4x^2 - 3y^2 = (2x + y\sqrt{3})(2x - y\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3y^2 = \left(k + \frac{1}{k} + k - \frac{1}{k}\right)\left(k + \frac{1}{k} - k + \frac{1}{k}\right) \Rightarrow 4x^2 - 3y^2 = (2k) \cdot \left(\frac{2}{k}\right)$$

$$\therefore \boxed{4x^2 - 3y^2 = 4}.$$

Questão 68 (IMO-Longlist-1988 / AHSME) - Resposta: Alternativa D.

Resolução: Do enunciado, temos:

$$p + q + r = -\frac{B}{A} \Rightarrow p + q + r = -\frac{(-1)}{1} \Rightarrow \boxed{p + q + r = 1};$$

$$pq + pr + qr = \frac{D}{A} \Rightarrow pq + pr + qr = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{pq + pr + qr = 1};$$

$$pqr = -\frac{D}{A} \Rightarrow pqr = -\frac{(-2)}{1} \Rightarrow \boxed{pqr = 2}$$

Então, podemos escrever:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$$

$$\Rightarrow (p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(p + q + r)(pq + pr + qr) - 3pqr$$

$$\Rightarrow 1^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \Rightarrow 1 = p^3 + q^3 + r^3 + 3 - 6$$

$$\Rightarrow p^3 + q^3 + r^3 = 1 + 3 \therefore \boxed{p^3 + q^3 + r^3 = 4}.$$

Questão 5.69 (Putnam-1939-Modificada)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = -\frac{a}{1} \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma = -a};$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{D}{A} \Rightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b};$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} \Rightarrow \alpha\beta\gamma = -\frac{c}{1} \Rightarrow \boxed{\alpha\beta\gamma = -c}$$

Então, podemos escrever:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma$$

$$(-a)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(-a)(b) - 3(-c) \Rightarrow -a^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3ab + 3c$$

$$\therefore \boxed{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a^3 + 3ab - 3c}.$$

Questão 5.70 (AIME-2008)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$r+s+t = -\frac{B}{A} \Rightarrow r+s+t = -\frac{0}{1} \Rightarrow \boxed{r+s+t=0}.$$

$$rs+rt+st = \frac{D}{A} \Rightarrow \boxed{rs+rt+st = \frac{1001}{8}}.$$

$$rst = -\frac{D}{A} \Rightarrow rst = -\frac{2008}{8} \Rightarrow \boxed{rst = -251}.$$

Então, podemos escrever:

$$r+s+t=0 \Rightarrow r+s=-t; \Rightarrow r+t=-s; \Rightarrow s+t=-r;$$

$$r+s+t=0 \Rightarrow r^3+s^3+t^3=3rst.$$

$$E = (r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3 \Rightarrow E = (-t)^3 + (-r)^3 + (-s)^3$$

$$\Rightarrow E = -(t^3 + r^3 + s^3) \Rightarrow E = -(3rst) \Rightarrow E = -3(-251) \therefore \boxed{E = 753}.$$

Questão 5.71 (Stanford-2007)

Resolução: Podemos escrever:

$$(a+b+c)^3 = 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2(a^3+b^3+c^3) - 6abc$$

$$\Rightarrow (r+s+t)^3 = 3(r+s+t)(r^2+s^2+t^2) - 2(r^3+s^3+t^3) + 6rst$$

$$\Rightarrow 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 6rst \Rightarrow 27 = 9 - 6 + 6rst \Rightarrow 6rst = 27 - 3$$

$$\Rightarrow rst = \frac{24}{6} \therefore \boxed{rst = 4}.$$

Questão 5.72 (Stanford-2007)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$a+b+c = -\frac{B}{A} \Rightarrow a+b+c = -\frac{(-7)}{1} \Rightarrow \boxed{a+b+c=7}.$$

$$ab + ac + bc = \frac{D}{A} \Rightarrow ab + ac + bc = \frac{(-6)}{1} \Rightarrow \boxed{ab + ac + bc = -6};$$

$$abc = -\frac{D}{A} \Rightarrow abc = -\frac{5}{1} \Rightarrow \boxed{abc = -5}.$$

Então, podemos escrever:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c; \Rightarrow a + c = -b; \Rightarrow b + c = -a;$$

$$E = (a + b)(a + c)(b + c) \Rightarrow E = (-c)(-b)(-a) \Rightarrow E = -(abc) \Rightarrow E = -(-5)$$

$$\therefore \boxed{(a + b)(a + c)(b + c) = 5}.$$

Questão 5.73

Resolução: Da identidade de Argand, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a^4 + a^2 + 1 &= (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) \\ A &= \frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1) \dots (32^4 + 32^2 + 1)}{(1^4 + 1^2 + 1)(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1) \dots (31^4 + 31^2 + 1)} \\ &\Rightarrow A = \frac{(2^2 - 2 + 1)(2^2 + 2 + 1) \dots (32^2 - 32 + 1)(32^2 + 32 + 1)}{(1^2 - 1 + 1)(1^2 + 1 + 1) \dots (31^2 - 31 + 1)(31^2 + 31 + 1)} \\ &\Rightarrow A = \frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 21 \dots 993 \cdot 1057}{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 21 \dots 931 \cdot 993} \Rightarrow A = 1057. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, temos: } A - 1053 = 1057 - 1053 = 4.$$

Questão 5.74

Resolução: Podemos escrever:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + ac^2 + a^2b + a^2c + b^2c + bc^2) + 6abc$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 \\ &\quad + 3abc + 3abc \end{aligned}$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(a + c) + 3bc(a + b)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3b(a + b)(a + c) + 3c(a + c)(a + b)$$

$$\therefore (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

Fazendo: $a = xy$, $b = yz$ e $c = xz$, temos:

$$\therefore (xy + yz + xz)^3 = (xy)^3 + (yz)^3 + (xz)^3 + 3(xy + yz)(xy + xz)(yz + xz).$$

Questão 5.75 (Noruega-1996-Modificada)

Resolução: Decompondo o 78 e usando os dados do enunciado, temos por comparação:

$$xyz = 78 \Rightarrow xyz = 2 \cdot 3 \cdot 13 \Rightarrow \boxed{x=2}; \boxed{y=3}; \boxed{z=13}.$$

Verificando na segunda equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 + 3^2 + 13^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4 + 9 + 169$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 182.$$

Observe que não condiz com o resultado dado, o que leva o leitor a pensar em erro de digitação, mas CUIDADO! Note que a questão é sutil, ela diz que x , y e z são números naturais, mas não diz que eles são primos, fazendo uma nova inspeção, encontramos:

$$xyz = 78 \Rightarrow xyz = 1 \cdot 6 \cdot 13 \Rightarrow \boxed{x=1}; \boxed{y=6}; \boxed{z=13}.$$

Verificando na segunda equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + 6^2 + 13^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 36 + 169$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 206.$$

Agora sim, temos o resultado esperado, assim o valor pedido é:

$$E = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xy + xz + yz} \Rightarrow E = \frac{1^3 + 6^3 + 13^3}{1 \cdot 6 + 1 \cdot 13 + 6 \cdot 13} \Rightarrow E = \frac{1 + 216 + 2197}{6 + 13 + 78} \therefore E = \frac{2414}{97}.$$

Questão 5.76

Resolução: Note que:

$$\boxed{a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}}; \quad a^4 - a^2b^2 + b^4 = (a^2)^2 - a^2b^2 + (b^2)^2$$

$$\Rightarrow a^4 - a^2b^2 + b^4 = \frac{(a^2)^3 + (b^2)^3}{a^2 + b^2} \Rightarrow \boxed{a^4 - a^2b^2 + b^4 = \frac{a^3 \cdot 2^2 + b^3 \cdot 2^2}{a^2 + b^2}};$$

$$a^8 - a^4b^4 + b^8 = (a^4)^2 - a^4b^4 + (b^4)^2$$

$$\Rightarrow a^8 - a^4b^4 + b^8 = \frac{(a^4)^3 + (b^4)^3}{a^4 + b^4} \Rightarrow \boxed{a^8 - a^4b^4 + b^8 = \frac{a^3 \cdot 2^2 + b^3 \cdot 2^2}{a^2 + b^2}};$$

$$a^{2^n} - a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}} + b^{2^n} = (a^{2^{n-1}})^2 - a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}} + (b^{2^{n-1}})^2$$

$$\Rightarrow a^{2^n} - a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}} + b^{2^n} = \frac{(a^{2^{n-1}})^3 + (b^{2^{n-1}})^3}{a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a^{2^n} - a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}} + b^{2^n} = \frac{a^{3 \cdot 2^{n-1}} + b^{3 \cdot 2^{n-1}}}{a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}}}}$$

Assim, podemos escrever:

$$E = (a^2 - ab + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \dots (a^{2^n} - a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}} + b^{2^n})$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{a^3 + b^3}{a + b} \right) \cdot \left(\frac{a^{3 \cdot 2} + b^{3 \cdot 2}}{a^2 + b^2} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a^{3 \cdot 2^{n-1}} + b^{3 \cdot 2^{n-1}}}{a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}}} \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{(a^3 + b^3) \cdot [(a^3)^2 + (b^3)^2] \cdot \dots \cdot [(a^3)^{2^{n-1}} + (b^3)^{2^{n-1}}]}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot \dots \cdot (a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}})} \Rightarrow$$

$$E = \left(\frac{a^3 - b^3}{a^3 - b^3} \right) \cdot \frac{(a^3 + b^3) \cdot [(a^3)^2 + (b^3)^2] \cdot \dots \cdot [(a^3)^{2^{n-1}} + (b^3)^{2^{n-1}}]}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot \dots \cdot (a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}})}$$

$$E = \frac{(a^3 - b^3) \cdot (a^3 + b^3) \cdot [(a^3)^2 + (b^3)^2] \cdot \dots \cdot [(a^3)^{2^{n-1}} + (b^3)^{2^{n-1}}]}{(a^3 - b^3)(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot \dots \cdot (a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}})}$$

$$\Rightarrow E = \frac{[(a^3)^{2^n} - (b^3)^{2^n}]}{(a^2 + ab + b^2)(a - b)(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot \dots \cdot (a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}})} \Rightarrow$$

$$E = \frac{[(a^{2^n})^3 - (b^{2^n})^3]}{(a^2 + ab + b^2)(a^{2^n} - b^{2^n})} \Rightarrow E = \frac{(a^{2^n} - b^{2^n})[(a^{2^n})^2 - a^{2^n}b^{2^n} + (b^{2^n})^2]}{(a^2 + ab + b^2)(a^{2^n} - b^{2^n})}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(a^{2 \cdot 2^n} - a^{2^n} b^{2^n} + b^{2 \cdot 2^n})}{(a^2 + ab + b^2)} \quad \therefore E = \frac{(a^{2^{n+1}} - a^{2^n} b^{2^n} + b^{2^{n+1}})}{(a^2 + ab + b^2)}.$$

Questão 5.77

a) resolução: Tirando o MMC, temos:

$$E = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(b-c) - (a-c) + (a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \Rightarrow E = \frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\therefore \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

b) resolução: Tirando o MMC, temos:

$$E = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a(b-c) - b(a-c) + c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \Rightarrow E = \frac{ab - ac - ab + bc + ac - bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\therefore \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

c) resolução: Tirando o MMC, temos:

$$E = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(b-c)[a^2 - a(b+c) + bc]}{(a-b)(a-c)(b-c)} \Rightarrow E = \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1.$$

d) resolução: Da identidade de Stevin, temos:

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

$$x-a = \frac{x^3}{(x-b)(x-c)} - \frac{(a+b+c)x^2}{(x-b)(x-c)} + \frac{(ab+ac+bc)x}{(x-b)(x-c)} - \frac{abc}{(x-b)(x-c)}.$$

Para $x = a$, temos:

$$\begin{aligned} a-a &= \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} - \frac{(a+b+c)a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(ab+ac+bc)a}{(a-b)(a-c)} - \frac{abc}{(a-b)(a-c)} \\ \Rightarrow \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} - \frac{(a+b+c)a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(ab+ac+bc)a}{(a-b)(a-c)} - \frac{abc}{(a-b)(a-c)} &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para $x = b$ e $x = c$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} - \frac{(a+b+c)b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(ab+ac+bc)b}{(b-a)(b-c)} - \frac{abc}{(b-a)(b-c)} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} - \frac{(a+b+c)c^2}{(c-a)(c-b)} + \frac{(ab+ac+bc)c}{(c-a)(c-b)} - \frac{abc}{(c-a)(c-b)} &= 0. \end{aligned}$$

Chamando a expressão pedida de E e somando as três equações encontradas, membro a membro:

$$\begin{aligned} \Rightarrow E - (a+b+c) &\left[\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \right] + \\ + (ab+ac+bc) &\left[\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \right] - \\ - abc &\left[\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \right] = 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E - (a+b+c)[1] + (ab+ac+bc)[0] - abc[0] = 0 \Rightarrow E - (a+b+c) = 0$$

$$\therefore \boxed{E = a+b+c}.$$

Questão 5.78

Resolução: Tirando o MMC, temos:

$$E = \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{a+c}{(b-a)(b-c)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(b+c)(b-c) - (a+c)(a-c) + (a+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \Rightarrow$$

$$E = \frac{b^2 - c^2 - (a^2 - c^2) + a^2 - b^2}{(a-b)(a-c)(b-c)} \Rightarrow E = \frac{b^2 - c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2}{(a-b)(a-c)(b-c)} \therefore E = 0.$$

Como queríamos provar.

Questão 5.79

Resolução: Tirando o MMC, temos:

$$E = \frac{a^2 + b + c}{(a-b)(a-c)} + \frac{a + b^2 + c}{(b-a)(b-c)} + \frac{a + b + c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(a^2 + b + c)(b-c) - (b^2 + a + c)(a-c) + (c^2 + a + b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$E = \frac{a^2(b-c) + (b^2 - c^2) - b^2(a-c) - (a^2 - c^2) + c^2(a-b) + (a^2 - b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \therefore \boxed{E=1}.$$

Questão 5.81

Resolução: Tirando o MMC e usando a identidade de Gauss, temos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c) = abc \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) + abc = abc$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b \text{ ou}$$

$$a+c=0 \Rightarrow a=-c \text{ ou } b+c=0 \Rightarrow b=-c.$$

Assim, podemos escrever:

$$E = \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} \Rightarrow E = \frac{1}{(-b)^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} \Rightarrow E = -\frac{1}{b^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{c^5} \Rightarrow E = \frac{1}{(0+c)^5} \therefore \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} = \frac{1}{(a+b+c)^5}.$$

Questão 5.82 (Finlândia 2002)**Resolução:** Tirando o MMC, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \\ \Rightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c) &= abc \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) + abc = abc \\ \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) &= 0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b \text{ ou} \\ a+c=0 \Rightarrow a=-c \text{ ou } b+c=0 \Rightarrow b &= -c. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} \Rightarrow E = \frac{1}{(-b)^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} \stackrel{n \text{ ímpar}}{\Rightarrow} E = -\frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} \\ \Rightarrow E &= \frac{1}{c^n} \Rightarrow E = \frac{1}{(0+c)^n} \therefore \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{(a+b+c)^n}. \end{aligned}$$

Questão 5.83**Resolução:** Tirando o MMC, temos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{2a-b} + \frac{4b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{2a+b} \Rightarrow E = \frac{2(2a+b) - 4b - 4(2a-b)}{4a^2-b^2} \\ \Rightarrow E &= \frac{4a+2b-4b-8a+4b}{4a^2-b^2} \Rightarrow E = \frac{2b-4a}{4a^2-b^2} \Rightarrow E = \frac{-2(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)} \\ \therefore \frac{2}{2a-b} + \frac{4b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{2a+b} &= -\frac{2}{2a+b}. \end{aligned}$$

Questão 5.84**Resolução:** Tirando o MMC, temos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{a+b}{(a-b)^2} - \frac{2a}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{(a+b)^2} \Rightarrow E = \frac{(a+b)^3 - 2a(a^2-b^2) + (a-b)^3}{(a^2-b^2)^2} \\ \Rightarrow E &= \frac{2a(a^2+3b^2) - 2a(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2} \Rightarrow E = \frac{2a^3+6ab^2-2a^3+2ab^2}{(a^2-b^2)^2} \\ \therefore \frac{a+b}{(a-b)^2} - \frac{2a}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{(a+b)^2} &= \frac{8ab^2}{(a^2-b^2)^2}. \end{aligned}$$

Questão 8.85 (CN-1961)**Resolução:** Tirando o MMC, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= \left[\frac{2x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{y^2}{y^2-x^2} \right] + \left[\frac{1}{x+y} + \frac{x}{x^2-y^2} \right] \\
 \Rightarrow E &= \left[\frac{2x(y-x) - y(x+y) + y^2}{y^2-x^2} \right] + \left[\frac{(y-x) - x}{y^2-x^2} \right] \\
 \Rightarrow E &= \left[\frac{2xy - 2x^2 - xy - y^2 + y^2}{y^2-x^2} \right] + \left[\frac{y-x-x}{y^2-x^2} \right] \\
 \Rightarrow E &= \left[\frac{xy - 2x^2}{y^2-x^2} \right] + \left[\frac{y-2x}{y^2-x^2} \right] \Rightarrow E = \left[\frac{x(y-2x)}{y^2-x^2} \right] + \left[\frac{y-2x}{y^2-x^2} \right] \\
 \therefore \left[\frac{2x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{y^2}{y^2-x^2} \right] + \left[\frac{1}{x+y} + \frac{x}{x^2-y^2} \right] &= x.
 \end{aligned}$$

Questão 5.86 (CN-1978) - Resposta: Alternativa D.**Resolução:** Tirando o MMC, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{a^4 - b^4}{(a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab)} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \\
 \Rightarrow E &= \frac{a^4 - b^4}{(a+b)^2(a-b)^2} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \Rightarrow E = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \\
 \Rightarrow E &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \Rightarrow E = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 - b^2} \Rightarrow E = \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} \\
 \therefore \frac{a^4 - b^4}{(a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab)} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} &= \frac{a-b}{a+b}.
 \end{aligned}$$

Questão 5.87**Resolução:** Tirando o MMC, temos:

$$E = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} \Rightarrow E = \frac{a^2y(x+y) + b^2x(x+y) - xy(a+b)^2}{xy(x+y)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2xy + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2xy - xy(a^2 + 2ab + b^2)}{xy(x+y)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2xy + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2xy - xya^2 - 2xyab - xyb^2}{xy(x+y)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2y^2 + b^2x^2 - 2xyab}{xy(x+y)} \Rightarrow E = \frac{(ay)^2 - 2(ay)(bx) + (bx)^2}{xy(x+y)}$$

$$\therefore \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} = \frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}.$$

Questão 5.88

Resolução: Podemos escrever:

$$a = \frac{(n+1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n+1)^2} \Rightarrow a = \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 + 4n^4}{n^2 + 4n^2 + 4n + 1}$$

$$\therefore \frac{(n+1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n+1)^2} = \frac{5n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{5n^2 + 4n + 1}.$$

$$b = \frac{(n-1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n-1)^2} \Rightarrow b = \frac{n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1 + 4n^4}{n^2 + 4n^2 - 4n + 1}$$

$$\therefore \frac{(n-1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n-1)^2} = \frac{5n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1}{5n^2 - 4n + 1}.$$

$$E = \frac{(n+1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n+1)^2} - \frac{(n-1)^4 + 4n^4}{n^2 + (2n-1)^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{5n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{5n^2 + 4n + 1} - \frac{5n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1}{5n^2 - 4n + 1}$$

$$\Rightarrow E = \frac{5n^4 + 4n^3 + n^2 + 5n^2 + 4n + 1}{5n^2 + 4n + 1} - \frac{5n^4 - 4n^3 + n^2 + 5n^2 - 4n + 1}{5n^2 - 4n + 1}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n^2(5n^2 + 4n + 1) + 5n^2 + 4n + 1}{5n^2 + 4n + 1} - \frac{n^2(5n^2 - 4n + 1) + 5n^2 - 4n + 1}{5n^2 - 4n + 1}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(n^2+1)(5n^2+4n+1)}{5n^2+4n+1} - \frac{(n^2+1)(5n^2-4n+1)}{5n^2-4n+1}$$

$$\Rightarrow E = (n^2+1) - (n^2+1) \therefore \boxed{\frac{(n+1)^4+4n^4}{n^2+(2n+1)^2} - \frac{(n-1)^4+4n^4}{n^2+(2n-1)^2} = 0}.$$

Como queríamos demonstrar.

Questão 5.89 (Grã-Bretânia-2014)

Resolução: Esta questão é uma aplicação do resultado da questão anterior, para $n = 2013$.

Questão 5.92 (IME-06/07)

Resolução: Do enunciado, temos duas opções:

Caso 01: Se $a+b+c \neq 0$.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b+b+c+a+c}{c+a+b} = \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = 2 \therefore \boxed{\frac{a+b}{c} = 2}.$$

Caso 02: Se $a+b+c = 0 \Rightarrow a+b = -c$.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{-c}{c} \therefore \boxed{\frac{a+b}{c} = -1}.$$

Questão 5.93

Resolução: Do enunciado, temos:

$$a+b+c=5 \Rightarrow a=5-(b+c)$$

$$a+b+c=5 \Rightarrow b=5-(a+c)$$

$$a+b+c=5 \Rightarrow c=5-(a+b)$$

Assim, substituindo, temos:

$$E = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \Rightarrow E = \frac{5-(b+c)}{b+c} + \frac{5-(a+c)}{a+c} + \frac{5-(a+b)}{a+b}$$

$$\Rightarrow E = \frac{5}{b+c} - \frac{(b+c)}{b+c} + \frac{5}{a+c} - \frac{(a+c)}{a+c} + \frac{5}{a+b} - \frac{(a+b)}{a+b}$$

$$\Rightarrow E = 5 \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 1 - 1 - 1 \Rightarrow E = 5 \cdot (6) - 3$$

$$\Rightarrow E = 30 - 3 \therefore \boxed{E = 27}.$$

Questão 5.94

Resolução: Usando o dado do enunciado e chamando a expressão de E, temos:

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; \Rightarrow E = \frac{2abc}{(a^2 + \underline{ac} + bc + \underline{ab})(b+c)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2abc}{[a(a+c+b)+bc](b+c)} \Rightarrow E = \frac{2abc}{[bc](-a)} \Rightarrow E = -\frac{2abc}{abc} \therefore E = -2.$$

Questão 5.95

Resolução: Usando o dado do enunciado e chamando a expressão de E, temos:

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; a+c=-b \Rightarrow ; b+c=-a;$$

$$\Rightarrow E = \frac{(a+b-2c)^2 + (a+c-2b)^2 + (b+c-2a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(-c-2c)^2 + (-b-2b)^2 + (-a-2a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(-3c)^2 + (-3b)^2 + (-3a)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow E = \frac{9c^2 + 9b^2 + 9a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{9(c^2 + b^2 + a^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \therefore \frac{(a+b-2c)^2 + (a+c-2b)^2 + (b+c-2a)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 9.$$

Questão 5.96 (Moscou 1949)

Resolução: Do enunciado, temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz \Rightarrow x^2 - 2xyz + y^2 + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot yz + (yz)^2 - (yz)^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - yz)^2 - (yz)^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Note que, para uma soma de "quadrados" ser nula, todos os termos quadráticos devem ser nulos, assim:

$$\begin{cases} (x-yz)^2 = 0 \\ (yz)^2 = 0 \\ y^2 = 0 \\ z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = yz = 0 \\ yz = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Questão 5.97 (Irã-1985)

Resolução: Multiplicando por 2, temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2zx + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 0$$

$$\therefore x-y=0 \Rightarrow \boxed{x=y}; y-z=0 \Rightarrow \boxed{y=z}; x-z=0 \Rightarrow \boxed{x=z}.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} \therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = \frac{1}{3}.$$

Questão 5.98

Resolução: Do enunciado, temos:

$$x+y+z=0 \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy+xz+yz)^2$$

$$a=b+c \Rightarrow a-b-c=0 \Rightarrow a+(-b)+(-c)=0$$

$$(a)^4 + (-b)^4 + (-c)^4 = 2[(a)(-b) + (a)(-c) + (-b)(-c)]^2$$

$$\therefore a^4 + b^4 + c^4 = 2(bc - ab - ac)^2.$$

Assim, $bc - ab - ac$ é inteiro já que a, b e c são inteiros.

Questão 5.99

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$a-2=x; b-2=y; c-2=z \Rightarrow x+y+z=a-2+b-2+c-2=0.$$

$$x+y+z=0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\therefore (a-2)^3 + (b-2)^3 + (c-2)^3 = 3(a-2)(b-2)(c-2).$$

Assim, temos:

$$E = \frac{(a-2)^3 + (b-2)^3 + (c-2)^3}{7(a-2)(b-2)(c-2)} \Rightarrow E = \frac{3(a-2)(b-2)(c-2)}{7(a-2)(b-2)(c-2)} \therefore E = \frac{3}{7}.$$

Questão 5.100 (BMO-2007)

Resolução: Seja $x = -1$, $y = -2007$ e $z = 2008$, temos:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + xz + yz)$$

$$E = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow E = \frac{2(x^4 + y^4 + z^4)}{2(x^2 + y^2 + z^2)} \Rightarrow E = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{2} \Rightarrow E = \frac{-2(xy + xz + yz)}{2} \Rightarrow E = -(xy + xz + yz)$$

$$\Rightarrow E = -[x(y + z) + yz] \Rightarrow E = -[(-1)(-2007 + 2008) + (-2007)(2008)]$$

$$\Rightarrow E = -[-1 - 4\,030\,056] \therefore \boxed{\frac{1^4 + 2007^4 + 2008^4}{1^2 + 2007^2 + 2008^2} = 4\,030\,057}.$$

Questão 5.101 (Singapura-2014)

Resolução: Seja $x = -1$, $y = -2013$ e $z = 2014$, temos:

$$x + y + z = -1 - 2013 + 2014 \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$E = \frac{2014^3 - 2013^3 - 1}{2013 \cdot 2014} \Rightarrow E = \frac{2014^3 + (-2013)^3 + (-1)^3}{(-1) \cdot (-2013) \cdot 2014}$$

$$\Rightarrow E = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} \Rightarrow E = \frac{3xyz}{xyz} \therefore \boxed{\frac{2014^3 - 2013^3 - 1}{2013 \cdot 2014} = 3}.$$

Questão 5.102

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{r} = x; \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = y; -3 = z;$$

$$\Rightarrow x + y + z = \sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} - 3 = 0.$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{r}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)^3 + (-3)^3 = 3\left(\sqrt[3]{r}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)(-3) \Rightarrow r + \frac{1}{r} - 27 = -9$$

$$\Rightarrow r + \frac{1}{r} - 27 + 9 = 0 \Rightarrow r + \frac{1}{r} - 18 = 0.$$

$$\Rightarrow r^3 + \frac{1}{r^3} + (-18)^3 = 3 \cdot \left(r^3\right) \cdot \left(\frac{1}{r^3}\right)(-18) \Rightarrow r^3 + \frac{1}{r^3} - 5832 = -54$$

$$\Rightarrow r^3 + \frac{1}{r^3} = 5832 - 54 \therefore r^3 + \frac{1}{r^3} = 5778.$$

Questão 5.103 (AMC-2011) - Resposta: Alternativa B.

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$x = \sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}} \Rightarrow x - \sqrt{9-6\sqrt{2}} - \sqrt{9+6\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{9-6\sqrt{2}} = y; \quad -\sqrt{9+6\sqrt{2}} = z;$$

$$\Rightarrow x + y + z = x - \sqrt{9-6\sqrt{2}} - \sqrt{9+6\sqrt{2}} = 0.$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx).$$

$$(x)^2 + \left(\sqrt{9-6\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{9+6\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 2\left[\left(\sqrt{9-6\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{9+6\sqrt{2}}\right) + x \cdot \sqrt{9-6\sqrt{2}} + x \cdot \sqrt{9+6\sqrt{2}}\right]$$

$$\Rightarrow x^2 + 9 - 6\sqrt{2} + 9 + 6\sqrt{2} = 2\left[\sqrt{9^2 - (6\sqrt{2})^2} + x \cdot \left(\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}\right)\right] \Rightarrow$$

$$x^2 + 18 = 2\left[\sqrt{81-72} + x \cdot x\right] \Rightarrow x^2 + 18 = 2\left[\sqrt{9+x^2}\right] \Rightarrow x^2 + 18 = 6 + 2x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \therefore \sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}} = 2.$$

Questão 5.104 (Princeton-2006)

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \Rightarrow x - \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{7+4\sqrt{3}} = y; \quad -\sqrt{7-4\sqrt{3}} = z;$$

$$\Rightarrow x + y + z = x - \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 x + y + z = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx). \\
 &\Rightarrow (x)^2 + (-\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2 + (-\sqrt{7-4\sqrt{3}})^2 = \\
 &= -2\left[(-\sqrt{7+4\sqrt{3}})(-\sqrt{7-4\sqrt{3}}) + x \cdot (-\sqrt{7+4\sqrt{3}}) + x \cdot (-\sqrt{7-4\sqrt{3}})\right] \\
 &\Rightarrow x^2 + 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} = -2\left[\sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} - x \cdot (\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}})\right] \Rightarrow \\
 x^2 + 14 &= -2[\sqrt{49-48} - x \cdot x] \Rightarrow x^2 + 14 = -2(1 - x^2) \Rightarrow x^2 + 14 = -2 + 2x^2 \\
 &\Rightarrow x^2 = 14 + 2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \therefore \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 4.
 \end{aligned}$$

Questão 5.105 (AHSME-1970) - Resposta: Alternativa A.

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \Rightarrow x - \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 0 \\
 &\Rightarrow -\sqrt{3+2\sqrt{2}} = y; \sqrt{3-2\sqrt{2}} = z; \Rightarrow \boxed{x+y+z=0}. \\
 x + y + z = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx). \\
 &\Rightarrow (x)^2 + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^2 = \\
 &= -2\left[(-\sqrt{3+2\sqrt{2}})(\sqrt{3-2\sqrt{2}}) + x \cdot (-\sqrt{3+2\sqrt{2}}) + x \cdot \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right] \Rightarrow \\
 x^2 + 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} &= -2\left[-\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} + x \cdot (-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}})\right] \\
 &\Rightarrow x^2 + 6 = -2[-\sqrt{9-8} + x \cdot (-x)] \Rightarrow x^2 + 6 = -2(-1 - x^2) \\
 &\Rightarrow x^2 + 6 = 2 + 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\
 \therefore \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} &= 2.
 \end{aligned}$$

Questão 5.106 (CN-1984) - Resposta: Alternativa B.

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{3+2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} - \sqrt{3-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} \Rightarrow x = \sqrt{3+2\sqrt[3]{2^3}} - \sqrt{3-2\sqrt[3]{2^3}} \\
 &\Rightarrow x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \Rightarrow x - \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 0 \\
 &\Rightarrow -\sqrt{3+2\sqrt{2}} = y; \sqrt{3-2\sqrt{2}} = z; \Rightarrow \boxed{x+y+z=0}. \\
 x + y + z = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (x)^2 + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^2 = \\
 &= -2 \left[(-\sqrt{3+2\sqrt{2}})(\sqrt{3-2\sqrt{2}}) + x \cdot (-\sqrt{3+2\sqrt{2}}) + x \cdot \sqrt{3-2\sqrt{2}} \right] \Rightarrow \\
 &x^2 + 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = -2 \left[-\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} + x \cdot (-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}) \right] \\
 &\Rightarrow x^2 + 6 = -2 \left[-\sqrt{9-8} + x \cdot (-x) \right] \Rightarrow x^2 + 6 = -2(-1-x^2) \\
 &\Rightarrow x^2 + 6 = 2 + 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\
 &\therefore \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2.
 \end{aligned}$$

Questão 5.107

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \Rightarrow x - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 0 \\
 &\Rightarrow -\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} = y; \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = z; \\
 &\Rightarrow x + y + z = x - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 0. \\
 x + y + z &= 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \\
 &\Rightarrow (x)^3 + (-\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^3 + (\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3 = 3(x)(-\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}) \\
 &\Rightarrow x^3 - 5\sqrt{2} - 7 + 5\sqrt{2} - 7 = -3x \left(\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} \right) \\
 &\Rightarrow x^3 - 14 = -3x(\sqrt[3]{50-49}) \Rightarrow x^3 - 14 = -3x \Rightarrow x^3 + 3x - 14 = 0.
 \end{aligned}$$

Pelo teorema do fator (veja detalhes no capítulo de fatoração) ou por inspeção, temos que 2 é raiz dessa equação.

$$\text{Assim: } \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2.$$

Questão 5.114 (Harvard/MIT-2008)

Resolução: Da teoria, podemos escrever:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+b^2+c^2)}{2} \cdot \frac{(a^5+b^5+c^5)}{3} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5} \Rightarrow \frac{(a^2+b^2+c^2)}{6} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2 = \frac{6}{5}.$$

Questão 5.115

Resolução: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$a - 2b + c = x; \quad b - 2c + a = y; \quad c - 2a + b = z;$$

$$\Rightarrow x + y + z = a - 2b + c + b - 2c + a + c - 2a + b = 0.$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + xz + yz)^2.$$

$$\Rightarrow E = (a - 2b + c)^4 + (b - 2c + a)^4 + (c - 2a + b)^4$$

$$\Rightarrow E = 2[(a - 2b + c)(b - 2c + a) + (a - 2b + c)(c - 2a + b) + (b - 2c + a)(c - 2a + b)]^2$$

$$E = 2 \left[\overline{ab} - \underline{2ac} + \overline{a^2} - \underline{2b^2} + \overline{4bc} - \underline{2ab} + \overline{bc} - \underline{2c^2} + \underline{ac} + \underline{ac} - \overline{2a^2} + \overline{ab} - \underline{2bc} + \right.$$

$$\left. + \overline{4ab} - \underline{2b^2} + \overline{c^2} - \underline{2ac} + \overline{bc} + \overline{bc} - \underline{2ab} + \underline{b^2} - \underline{2c^2} + \underline{4ac} - \underline{2bc} + \underline{ac} - \overline{2a^2} + \overline{ab} \right]^2$$

$$\Rightarrow E = 2 \left[\overline{3ab} + \underline{3ac} + \overline{3bc} - \overline{3a^2} - \underline{3b^2} - \underline{3c^2} \right]^2$$

$$\Rightarrow E = 2 \left[3 \cdot (ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2) \right]^2$$

$$\Rightarrow E = 2 \cdot 9 \left[-\frac{(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)}{2} \right]^2$$

$$\Rightarrow E = 18 \left[-\frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2} \right]^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{18[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]^2}{4}$$

$$\therefore E = \frac{9}{2} \cdot [(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]^2.$$

Questão 5.116

Resolução: Da teoria, podemos escrever:

$$E = \frac{(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2}{2(5+2bc)} \Rightarrow E = \frac{[a+(b+c)]^2 + [a-(b+c)]^2}{2(5+2bc)} \Rightarrow$$

$$E = \frac{2[a^2 + (b+c)^2]}{2(5+2bc)} \Rightarrow E = \frac{2[a^2 + b^2 + 2bc + c^2]}{2(5+2bc)} \Rightarrow E = \frac{5+2bc}{5+2bc} \therefore E = 1.$$

Questão 5.117

Resolução: Da teoria, temos: $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab+ac+bc)$. Logo:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{abc(ac+bc+ab)} = \frac{-5abc(ab+ac+bc)}{abc(ac+bc+ab)} \therefore \frac{a^5 + b^5 + c^5}{abc(ac+bc+ab)} = -5.$$

Questão 5.118

Resolução: Da teoria, podemos escrever:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (3abc)^2$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 + 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) = 9a^2b^2c^2$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 + 2[(ab+ac+bc)^3 - 3a^2b^2c^2] = 9a^2b^2c^2$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 + 2(ab+ac+bc)^3 = 9a^2b^2c^2 - 6a^2b^2c^2$$

$$\therefore a^6 + b^6 + c^6 = 3a^2b^2c^2 - 2(ab+bc+ca)^3.$$

Questão 5.119

Resolução: Da teoria, podemos escrever:

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (3abc)^2.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{ab+bc+ac}{abc} = 0 \Rightarrow ab+bc+ac=0.$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 + 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) = 9a^2b^2c^2$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 + 2\left[\frac{0}{(ab+ac+bc)^3} + 3a^2b^2c^2\right] = 9a^2b^2c^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 a^6 + b^6 + c^6 + 6a^2b^2c^2 &= 9a^2b^2c^2 \Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 = 9a^2b^2c^2 - 6a^2b^2c^2 \Rightarrow \\
 a^6 + b^6 + c^6 &= 3a^2b^2c^2 \Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 = (3abc)abc \Rightarrow \frac{a^6 + b^6 + c^6}{3abc} = abc \\
 \therefore \frac{a^6 + b^6 + c^6}{a^3 + b^3 + c^3} &= abc.
 \end{aligned}$$

Questão 5.120 (Croácia-2001)

Observação: Temos abaixo a primeira resolução desta questão, a segunda resolução está no capítulo 8, cuja resolução é por somas de Newton.

Resolução: Da teoria, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 a^4 + b^4 + c^4 &= 2(ab + ac + bc)^2 \Rightarrow (ab + ac + bc)^2 = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}, \\
 a^7 + b^7 + c^7 &= 7abc(ab + ac + bc)^2 \Rightarrow a^7 + b^7 + c^7 = 7abc \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} \right) \\
 \Rightarrow a^7 + b^7 + c^7 &= \frac{7}{2} \cdot abc(a^4 + b^4 + c^4) \therefore \frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc(a^4 + b^4 + c^4)} = \frac{7}{2}.
 \end{aligned}$$

Questão 5.121

Resolução: Da teoria, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 a + b + c = 0 &\Rightarrow (ab + bc + ac)^3 = \underline{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3} - 3a^2b^2c^2 \\
 \Rightarrow \underline{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3} &= (ab + bc + ac)^3 + 3a^2b^2c^2.
 \end{aligned}$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 - (ab + bc + ac)^3}{6abc \cdot (a^3 + b^3 + c^3)} \\
 \Rightarrow E &= \frac{(ab + bc + ac)^3 + 3a^2b^2c^2 - (ab + bc + ac)^3}{6abc \cdot (3abc)} \Rightarrow E = \frac{3a^2b^2c^2}{18a^2b^2c^2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 - (ab + bc + ac)^3}{6abc \cdot (a^3 + b^3 + c^3)} = \frac{1}{6}.$$

Questão 5.123 (Peru 2009)**Resolução:** Podemos escrever:

$$x = ac - bd = ac - b(-a - b - c) \Rightarrow x = ac + ab + b^2 + bc$$

$$\Rightarrow x = a(b+c) + b(b+c) \Rightarrow \boxed{x = (a+b)(b+c)}.$$

$$y = bc - ad = bc - a(-a - b - c) \Rightarrow y = bc + a^2 + ab + ac$$

$$\Rightarrow y = a(a+b) + c(a+b) \Rightarrow \boxed{y = (a+b)(a+c)}.$$

$$z = cd - ab = -c(-a - b - c) - ab \Rightarrow z = -(ab + ac + bc + c^2)$$

$$\Rightarrow z = -[a(b+c) + c(b+c)] \Rightarrow \boxed{z = -(a+c)(b+c)}.$$

Logo, temos:

$$E = (ac - bd)(bc - ad)(cd - ab)$$

$$\Rightarrow E = -(a+b) \cdot (a+c) \cdot \overline{(a+b)} \cdot (b+c) \cdot \overline{(a+c)} \cdot \overline{(b+c)}$$

$$\Rightarrow E = -(a+b) \cdot (a+c) \cdot \overline{(-1)(a+d)} \cdot (b+c) \cdot \overline{(-1)(b+d)} \cdot \overline{(-1)(c+d)}$$

$$\therefore E = (a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d).$$

Questão 5.125 (Rússia)**Resolução:** Podemos escrever:

$$E = a^2 \cdot (c-b) + b^2 \cdot (a-c) + c^2 \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow E = a^2(c-b) + \underline{ab^2} - b^2c + bc^2 - \underline{ac^2}$$

$$\Rightarrow E = a^2(c-b) - a(c^2 - b^2) + bc(c-b)$$

$$\Rightarrow E = (c-b)[a^2 - a(b+c) + bc] \therefore E = (c-b)(a-b)(a-c).$$

Como a , b e c são números reais distintos dois a dois, temos que a diferença não é nula, o que conclui a nossa demonstração.

Capítulo 06 – Fatoração**Questão 6.1 (Harvard-MIT-2012)****Resolução:** Note que $25^3 - 27^2$ pode ser fatorado da seguinte forma:

$$25^3 - 27^2 = (5^2)^3 - (3^3)^2 = (5^3)^2 - (3^3)^2 = (5^3 + 3^3)(5^3 - 3^3)$$

$$\Rightarrow 25^3 - 27^2 = (125 + 27)(5 - 3)(5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2)$$

$$\Rightarrow 25^3 - 27^2 = (152)(2)(25 + 15 + 9) \Rightarrow 25^3 - 27^2 = (2^3 \cdot 19)(2)(49)$$

$$\Rightarrow 25^3 - 27^2 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 19.$$

Assim, a soma pedida vale: $2 + 7 + 19 = 28$.

Questão 6.2 (CN-1954)

Resolução: Fatorando por diferença de quadrados e chamando a expressão de E, temos:

$$E = 16x^4 - 1 \Rightarrow E = (2x)^4 - 1^4 \Rightarrow E = [(2x)^2 + 1^2][(2x)^2 - 1^2]$$

$$\Rightarrow E = [4x^2 + 1][(2x) + 1][(2x) - 1] \therefore E = (4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1).$$

Questão 6.3 (AHSME-1954) - Resposta: Alternativa E.

Resolução: Usando o artifício de somar e subtrair a mesma quantidade e chamando a expressão de E, temos:

$$E = x^4 + 64 \Rightarrow E = (x^2)^2 + 8^2 \Rightarrow E = (x^2)^2 + 8^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 8 - 2 \cdot x^2 \cdot 8$$

$$\Rightarrow E = (x^2 + 8)^2 - 16x^2 \Rightarrow E = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2$$

$$\Rightarrow E = (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x) \therefore E = (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8).$$

Questão 6.4

Resolução: Agrupando os termos semelhantes e chamando a expressão de E, temos:

$$E = 5ax + 3by - 5ay - 3bx \Rightarrow E = 5a(x - y) - 3b(x - y) \therefore E = (x - y)(5a - 3b).$$

Questão 6.5 (CN-1951)

Resolução: Fatorando por diferença de quadrados e chamando a expressão de E, temos:

$$E = x^2 - 2xy + y^2 - a^2 \Rightarrow E = (x - y)^2 - a^2 \Rightarrow E = [(x - y) + a][(x - y) - a]$$

$$\therefore E = (x - y - a)(x - y + a).$$

Questão 6.6 (CN-1952)

Resolução: Agrupando os termos semelhantes e chamando a expressão de E, temos:

$$E = 8x^2 - 8xy - 3x + 3y \Rightarrow E = 8x(x - y) - 3(x - y) \therefore E = (x - y)(8x - 3).$$

Questão 6.7

Resolução: Fatorando por diferença de quadrados e chamando a expressão de E, temos:

$$E = 16x^4y^6 - 81a^6b^4 \Rightarrow E = (4x^2y^3)^2 - (9a^3b^2)^2$$

$$\therefore E = (4x^2y^3 + 9a^3b^2)(4x^2y^3 - 9a^3b^2).$$

Questão 6.8

Resolução: Fatorando por diferença de quadrados e chamando a expressão de E, temos:

$$E = (2a - 3)^4 - (a - 5)^4 \Rightarrow E = [(2a - 3)^2 + (a - 5)^2][(2a - 3)^2 - (a - 5)^2]$$

$$\Rightarrow E = [(2a - 3)^2 + (a - 5)^2][(2a - 3) + (a - 5)][(2a - 3) - (a - 5)]$$

$$\Rightarrow E = [4a^2 - 12a + 9 + a^2 - 10a + 25](3a - 8)(a + 2)$$

$$\therefore E = (3a - 8)(a + 2)(5a^2 - 22a + 34).$$

Questão 6.9

Resolução: Usando o artifício de multiplicar e dividir a mesma quantidade e chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \Rightarrow E = \frac{a^2 \cdot a}{bc \cdot a} + \frac{b^2 \cdot b}{ac \cdot b} + \frac{c^2 \cdot c}{ab \cdot c} \Rightarrow E = \frac{a^3}{abc} + \frac{b^3}{abc} + \frac{c^3}{abc}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \Rightarrow E = \frac{3abc}{abc} \quad \therefore [E = 3].$$

Questão 6.10

Resolução: Usando o artifício de multiplicar e dividir a mesma quantidade e chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{27a^2}{5bc} + \frac{27b^2}{5ac} + \frac{27c^2}{5ab} \Rightarrow E = \frac{27a^2 \cdot a}{5bc \cdot a} + \frac{27b^2 \cdot b}{5ac \cdot b} + \frac{27c^2 \cdot c}{5ab \cdot c}$$

$$\Rightarrow E = \frac{27a^3}{5abc} + \frac{27b^3}{5abc} + \frac{27c^3}{5abc} \Rightarrow E = \frac{27(a^3 + b^3 + c^3)}{5abc} \Rightarrow E = \frac{27 \cdot (3abc)}{5abc}$$

$$\therefore \frac{27a^2}{5bc} + \frac{27b^2}{5ac} + \frac{27c^2}{5ab} = \frac{81}{5}.$$

Questão 6.11 (AHSME-1952) - Resposta: Alternativa A.

Resolução: Fatorando por diferença de cubos e chamando a expressão de E, temos:

$$E = a^3 - a^{-3} \Rightarrow E = (a - a^{-1}) \left[a^2 + a \cdot a^{-1} + (a^{-1})^2 \right]$$

$$\Rightarrow E = \left(a - \frac{1}{a} \right) \left[a^2 + 1 + a^{-2} \right] \therefore a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a} \right) \left[a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} \right].$$

Questão 6.12 (AHSME-1955) - Resposta: Alternativa B.

Resolução: Fatorando por diferença de quadrados e chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} - b^{-2}} \Rightarrow E = \frac{(a^{-2})^2 - (b^{-2})^2}{a^{-2} - b^{-2}} \Rightarrow E = \frac{(a^{-2} + b^{-2})(a^{-2} - b^{-2})}{a^{-2} - b^{-2}}$$

$$\therefore \frac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} - b^{-2}} = a^{-2} + b^{-2}.$$

Questão 6.13 (AHSME-1950)

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2} \Rightarrow E = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b^2 - ab}{ab - a^2} \Rightarrow E = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b(b - a)}{a(b - a)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b}{a} \Rightarrow E = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b \cdot b}{a \cdot b} = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b}.$$

Questão 6.14

Resolução: Usando o artifício de multiplicar e dividir a mesma quantidade e chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca} + \frac{a-b}{ab} \Rightarrow E = \frac{(b-c) \cdot a}{bc \cdot a} + \frac{(c-a) \cdot b}{ca \cdot b} + \frac{(a-b) \cdot c}{ab \cdot c}$$

$$\Rightarrow E = \frac{ab - ac}{abc} + \frac{bc - ab}{abc} + \frac{ac - bc}{abc} \Rightarrow E = \frac{ab - ac + bc - ab + ac - bc}{abc}$$

$$\therefore \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca} + \frac{a-b}{ab} = 0.$$

Questão 6.15

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned} E &= ax(b^2 + y^2) + by(a^2 + x^2) \Rightarrow E = \overline{axb^2} + \overline{axy^2} + \overline{bya^2} + \overline{byx^2} \\ \Rightarrow E &= bx(ab + xy) + ay(xy + ab) \Rightarrow E = (ab + xy)(bx + ay) \\ \therefore ax(b^2 + y^2) + by(a^2 + x^2) &= (ay + bx)(ab + xy). \end{aligned}$$

Questão 6.16

Resolução: Fatorando por diferença de quadrados e chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned} E &= (a^2 - 3a + ab - 3b)^2 - (a + b)^2 \Rightarrow E = [a(a - 3) + b(a - 3)]^2 - (a + b)^2 \\ \Rightarrow E &= [(a - 3)(a + b)]^2 - (a + b)^2 \\ \Rightarrow E &= [(a - 3)(a + b) + (a + b)][(a - 3)(a + b) - (a + b)] \\ \Rightarrow E &= [(a + b)(a - 3 + 1)][(a + b)(a - 3 - 1)] \therefore E = (a - 4)(a - 2)(a + b)^2. \end{aligned}$$

Questão 6.17

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned} E &= a^2c + 2abc + b^2c + a^2d + 2abd + b^2d \\ \Rightarrow E &= c(a^2 + 2ab + b^2) + d(a^2 + 2ab + b^2) \Rightarrow E = (c + d)(a^2 + 2ab + b^2) \\ \therefore E &= (c + d)(a + b)^2. \end{aligned}$$

Questão 6.22

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{a^2 - bc - b^2 + ac}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} \Rightarrow E = \frac{(a - b)(a + b) + c(a - b)}{(a + b)^2 - c^2} \\ \Rightarrow E &= \frac{(a - b)(a + b + c)}{(a + b - c)(a + b + c)} \therefore \frac{a^2 - bc - b^2 + ac}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} = \frac{a - b}{a + b - c}. \end{aligned}$$

Questão 6.23 (AHSME-1960)

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac} \Rightarrow E = \frac{(a + b)^2 - c^2}{(a + c)^2 - b^2} \Rightarrow E = \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{(a + c - b)(a + b + c)}$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac} = \frac{a + b - c}{a - b + c}.$$

Questão 6.24

Resolução: Note que a soma dos termos em parênteses dá zero, então, usando o produto condicional e chamando a expressão de E, temos:

$$a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \text{condicional}$$

$$a - b + b - c + c - a = 0 \Rightarrow \text{condicional}$$

$$E = \frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3} \Rightarrow E = \frac{3(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{3(a - b)(b - c)(c - a)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{3(a - b)(a + b)(b - c)(b + c)(c - a)(c + a)}{3(a - b)(b - c)(c - a)} \therefore E = (a + b)(a + c)(b + c).$$

Questão 6.25

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{(a^5 + a^3b^2)(a^3 - b^3)(a^2 - b^2)}{(a^4 - b^4)(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3)} \Rightarrow$$

$$E = \frac{a^3(a^2 + b^2)(a^3 - b^3)(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)[a^2(a + b) - b^2(a + b)]} \Rightarrow E = \frac{a^3(a^3 - b^3)}{[(a + b)(a^2 - b^2)]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^3(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{[(a + b)(a + b)(a - b)]} \therefore E = \frac{a^3(a^2 + ab + b^2)}{(a + b)^2}.$$

Questão 6.26

Resolução: Podemos escrever:

$$E = \frac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2} \Rightarrow E = \frac{8ab(a^2 + b^2)}{[(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)][(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{8ab(a^2 + b^2)}{(b^2 + b^2)(a^2 + a^2)} \Rightarrow E = \frac{8ab(a^2 + b^2)}{4a^2b^2} \Rightarrow E = \frac{2(a^2 + b^2)}{ab}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2a^2}{ab} + \frac{2b^2}{ab} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2} = \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}}$$

Questão 6.27

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \Rightarrow \frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2} = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \Rightarrow \frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2} = a^4 - a^2b^2 + b^4$$

$$E = \frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2} - \frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2} - \frac{(a^4 - b^4)}{(a^2 + b^2)(a - b)}$$

$$\Rightarrow E = (a^4 + a^2b^2 + b^4) - (a^4 - a^2b^2 + b^4) - \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)(a - b)}$$

$$\Rightarrow E = 2a^2b^2 - \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} \Rightarrow E = 2a^2b^2 - (a+b)$$

$$\therefore \frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2} - \frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2} - \frac{(a^4 - b^4)}{(a^2 + b^2)(a - b)} = 2a^2b^2 - a - b.$$

Questão 6.28

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \left(\frac{a^3 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab} \right) \Rightarrow E = \frac{\cancel{(a-b)}(a^2 + ab + b^2)}{(a-b)^2} \cdot \frac{\cancel{(a-b)}\cancel{(a+b)}}{a\cancel{(a+b)}}$$

$$\therefore E = \frac{a^2 + ab + b^2}{a}$$

Questão 6.29

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$E = \frac{(a-b)^4 - ab(a-b)^2 - 2a^2b^2}{(a-b)(a^3 - b^3) + 2a^2b^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 - ab(a^2 - 2ab + b^2) - 2a^2b^2}{a^4 - \overline{ab^3} - \overline{a^3b} + b^4 + 2a^2b^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 - ab(a^2 - 2ab + b^2)}{(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\overline{a^4} - 4a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3 + \overline{b^4} - \overline{a^3b} + \overline{2a^2b^2} - \overline{ab^3}}{(a^2 + b^2)[a^2 + b^2 - \overline{ab}]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(a^2 + b^2)[a^2 + b^2 - \overline{ab}] - 4a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3}{(a^2 + b^2)[a^2 + b^2 - ab]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{(a^2 + b^2)}[a^2 + b^2 - \cancel{ab}] - 4ab\cancel{(a^2 - ab + b^2)}}{\cancel{(a^2 + b^2)}[a^2 + b^2 - \cancel{ab}] - \cancel{(a^2 + b^2)}[a^2 + b^2 - ab]}$$

$$\therefore \boxed{\frac{(a-b)^4 - ab(a-b)^2 - 2a^2b^2}{(a-b)(a^3 - b^3) + 2a^2b^2} = 1 - \frac{4ab}{a^2 + b^2}}$$

Questão 6.30

Resolução: Podemos escrever:

$$\boxed{E = \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a}} \Rightarrow E = \frac{a^2 + b^2}{-c} + \frac{b^2 + c^2}{-a} + \frac{c^2 + a^2}{-b}$$

$$\Rightarrow E = \frac{-ab(a^2 + b^2) - bc(b^2 + c^2) - ca(c^2 + a^2)}{abc}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\overline{-a^3b} - \overline{ab^3} - \overline{b^3c} - \overline{bc^3} - \overline{ac^3} - \overline{a^3c}}{abc} \Rightarrow$$

$$E = \frac{a^3(-b-c) + b^3(-a-c) + c^3(-a-b)}{abc} \Rightarrow E = \frac{a^3 \cdot a + b^3 \cdot b + c^3 \cdot c}{abc}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^3 \cdot a}{abc} + \frac{b^3 \cdot b}{abc} + \frac{c^3 \cdot c}{abc} \therefore \boxed{E = \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}}$$

Questão 6.31 - Resposta: Alternativa D.

Resolução: Elevando ao quadrado temos, temos:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-a}}{\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}}} \\
 \Rightarrow M^2 &= \frac{(\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-a})^2}{\left(\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}}\right)^2} \\
 \Rightarrow M^2 &= \frac{a-b+b-c+c-a+2(\text{produto 2 a 2})}{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}} \\
 \Rightarrow M^2 &= 2 \quad \therefore \boxed{M = \sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Questão 6.32

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= 4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 \\
 \Rightarrow E &= [(2bc) - (a^2 - b^2 - c^2)][(2bc) + (a^2 - b^2 - c^2)] \\
 \Rightarrow E &= [b^2 + 2bc + c^2 - a^2][a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)] \\
 \Rightarrow E &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\
 \Rightarrow E &= [(b+c-a)(b+c+a)][(a+b-c)(a-b+c)] \\
 \therefore E &= (a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(-a+b+c).
 \end{aligned}$$

Questão 6.33

Resolução: Chamando a expressão de E, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \\
 \Rightarrow E &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\
 \Rightarrow E &= c^2(2a^2 + 2b^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4 \\
 \Rightarrow E &= c^2[(a+b)^2 + (a-b)^2] - (a^2 - b^2)^2 - c^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E &= -\left[c^4 + c^2[(a+b)^2 + (a-b)^2] + [(a-b)(a+b)]^2\right] \\
 \Rightarrow E &= -\left[c^2 - (a-b)^2\right]\left[c^2 - (a+b)^2\right] \\
 \Rightarrow E &= \left[c^2 - (a-b)^2\right]\left[(a+b)^2 - c^2\right] \\
 \Rightarrow E &= \left[[c - (a-b)](c + a - b)\right]\left[(a+b-c)[a - (b-c)]\right] \\
 \therefore E &= (a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(-a+b+c).
 \end{aligned}$$

Questão 6.34 (AIME-1986)

Resolução: Note que a expressão pedida é uma aplicação do resultado da questão anterior, então temos:

$$\begin{aligned}
 E &= (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7})(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}) \\
 \Rightarrow E &= (a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(-a+b+c) \Rightarrow \\
 E &= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4), \quad a = \sqrt{5}; \quad b = \sqrt{6}; \quad c = \sqrt{7}; \\
 a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 &= (\sqrt{5})^2(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{5})^2(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{6})^2(\sqrt{7})^2 \\
 \Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 &= 30 + 35 + 42 \Rightarrow \boxed{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 107}. \\
 a^4 + b^4 + c^4 &= (\sqrt{5})^4 + (\sqrt{6})^4 + (\sqrt{7})^4 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 25 + 36 + 49 \\
 \Rightarrow \boxed{a^4 + b^4 + c^4 = 110}. \\
 E &= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \Rightarrow E = 2 \cdot (107) - (110) \\
 \Rightarrow E &= 214 - 110 \therefore \boxed{E = 104}.
 \end{aligned}$$

Questão 6.35 (Putnam-1938-Modificada)

Resolução: Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= (y^2 - 3y + 2)^2 - 3(y^2 - 3y + 2) + 2 - y \\
 \Rightarrow E &= (y^2 - 3y + 2)(y^2 - 3y + 2) - 3y^2 + 9y - 6 + 2 - y \\
 \Rightarrow E &= y^4 - 3y^3 + 2y^2 - 3y^3 + 9y^2 - 6y + 2y^2 - 6y + 4 - 3y^2 + 8y - 4 \\
 \Rightarrow E &= y^4 - 6y^3 + 10y^2 - 4y \Rightarrow E = \overline{y^4} - \overline{4y^3} - 2y^3 + \overline{2y^2} + 8y^2 - 4y \\
 \Rightarrow E &= \overline{y^2}(y^2 - 4y + 2) - 2y(y^2 - 4y + 2) \therefore \boxed{E = (y^2 - 4y + 2)(y^2 - 2y)}.
 \end{aligned}$$

Questão 6.39 (Harvard-MIT-2012)

Resolução: Elevando ao quadrado, temos:

$$2a + 3b = 10 \Rightarrow (2a + 3b)^2 = 10^2 \Rightarrow 4a^2 + 12ab + 9b^2 = 100$$

$$\Rightarrow 20 + 12ab = 100 \Rightarrow 12ab = 80 \Rightarrow ab = \frac{80}{12} \therefore \boxed{ab = \frac{20}{3}}.$$

Questão 6.40 (Harvard-MIT-2014)

Resolução: Somando as equações, temos:

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+c} + 20, \quad \frac{b^2}{b+c} = \frac{b^2}{b+a} + 14 \quad \text{e} \quad \frac{c^2}{c+a} = \frac{c^2}{c+b} + x$$

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+c} + 20 + \frac{c^2}{b+a} + 14 + \frac{a^2}{c+b} + x$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} + \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = 20 + 14 + x$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} + \frac{(b-c)(b+c)}{b+c} + \frac{(c-a)(c+a)}{c+a} = 34 + x$$

$$\Rightarrow a - b + b - c + c - a = 34 + x \Rightarrow 0 = 34 + x \therefore \boxed{x = -34}.$$

Questão 6.51

Resolução: Do enunciado, temos:

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca \Rightarrow a^2 + 1 = \underline{a^2} + ab + bc + \underline{ca}$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 = a(a+c) + b(a+c) \therefore \boxed{a^2 + 1 = (a+c)(a+b)}.$$

$$b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca \Rightarrow b^2 + 1 = \underline{b^2} + ab + \underline{bc} + ca$$

$$\Rightarrow b^2 + 1 = b(b+c) + a(b+c) \therefore \boxed{b^2 + 1 = (a+b)(b+c)}.$$

$$c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca \Rightarrow c^2 + 1 = \underline{c^2} + ab + bc + \underline{ca}$$

$$\Rightarrow c^2 + 1 = c(a+c) + b(a+c) \therefore \boxed{c^2 + 1 = (b+c)(a+c)}.$$

Assim, substituindo, temos:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a+c)(a+b) \cdot (a+b)(b+c) \cdot (b+c)(a+c)$$

$$\therefore (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = [(a+b)(b+c)(a+c)]^2.$$

Questão 6.54

Resolução: Do enunciado, temos:

$$E = \frac{a^2}{(a+b-c)(a-b+c)} + \frac{b^2}{(c+b-a)(a+b-c)} + \frac{c^2}{(c+b-a)(a-b+c)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^2}{(-c-c)(-b-b)} + \frac{b^2}{(-a-a)(-c-c)} + \frac{c^2}{(-a-a)(-b-b)} \Rightarrow$$

$$E = \frac{a^2}{4bc} + \frac{b^2}{4ac} + \frac{c^2}{4ab} \Rightarrow E = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} \Rightarrow E = \frac{3abc}{4abc} \therefore \boxed{E = \frac{3}{4}}$$

Questão 6.55

Resolução: Usando a notação sigma (*), temos:

$$\sigma = ab + bc + ca; a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2\sigma$$

$$\bullet x = a^4 - (b^2 - c^2)^2 \Rightarrow x = (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow x = (-2\sigma - c^2 - c^2)(-2\sigma - b^2 - b^2) \Rightarrow x = 4(\sigma + c^2)(\sigma + b^2)$$

$$\bullet \sigma + c^2 = ab + bc + ca + c^2 \Rightarrow \sigma + c^2 = ab + c \overbrace{(b+a+c)}^0 \therefore \sigma + c^2 = ab$$

$$\bullet \sigma + b^2 = ab + bc + ca + b^2 \Rightarrow \sigma + b^2 = ca + b \overbrace{(a+c+b)}^0 \therefore \sigma + b^2 = ca$$

$$x = 4(\sigma + c^2)(\sigma + b^2) \Rightarrow x = 4(ab)(ca) \therefore \boxed{a^4 - (b^2 - c^2)^2 = 4a^2bc}$$

$$\bullet y = b^4 - (c^2 - a^2)^2 \Rightarrow y = (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - c^2 + a^2)$$

$$\Rightarrow y = (-2\sigma - a^2 - a^2)(-2\sigma - c^2 - c^2) \Rightarrow y = 4(\sigma + a^2)(\sigma + c^2)$$

$$\bullet \sigma + a^2 = ab + bc + ca + a^2 \Rightarrow \sigma + a^2 = bc + a \overbrace{(b+c+a)}^0 \therefore \sigma + a^2 = bc$$

$$y = 4(\sigma + a^2)(\sigma + c^2) \Rightarrow y = 4(bc)(ab) \therefore \boxed{b^4 - (c^2 - a^2)^2 = 4ab^2c}$$

$$\bullet z = c^4 - (a^2 - b^2)^2 \Rightarrow z = (c^2 + a^2 - b^2)(c^2 - a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow z = (-2\sigma - b^2 - b^2)(-2\sigma - a^2 - a^2) \Rightarrow z = 4(\sigma + b^2)(\sigma + a^2)$$

$$\Rightarrow z = 4(ca)(bc) \therefore \boxed{c^4 - (a^2 - b^2)^2 = 4abc^2}$$

$$E = \frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^4}{4a^2bc} + \frac{b^4}{4ab^2c} + \frac{c^4}{4abc^2} \Rightarrow E = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} \Rightarrow E = \frac{3abc}{4abc}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2} = \frac{3}{4}}$$

(*) Veja todos os detalhes da notação sigma no capítulo de Somas de Newton (capítulo 8)!

Questão 6.57

Resolução: Podemos escrever:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = 1 \Rightarrow \frac{a(1+b) + b(1+a)}{(1+a)(1+b)} = 1 \Rightarrow a(1+b) + b(1+a) = (1+a)(1+b)$$

$$\Rightarrow a + ab + b + ab = 1 + a + b + ab \therefore \boxed{ab = 1}.$$

$$E = \frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} \Rightarrow E = \frac{a(1+a^2) - b(1+b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} \Rightarrow E = \frac{a + a^3 - b - b^3}{1+a^2+b^2+a^2b^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(a-b) + (a-b)(a^2 + ab + b^2)}{1+a^2+b^2+1^2} \Rightarrow E = \frac{(a-b) \left[1 + \cancel{a^2 + ab + b^2} \right]}{\cancel{1+a^2+b^2+1^2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} = a - b}$$

Capítulo 07 – Polinômios Simétricos

Questão 7.1

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é simétrico.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $a = 0$, ou seja, a é fator.

Passo 03: Pela propriedade P2, b também é fator.

Passo 04: Veja que o polinômio se anula para $a = -b$, ou seja, $a + b$ é fator.

Passo 05: Como o grau do polinômio é 5 e o produto dos fatores é do 3º grau, podemos escrever:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a+b) \left[x \cdot (a^2 + b^2) + y \cdot ab \right].$$

Passo 06: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $a = 1$ e $b = 1$, temos:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a+b) \left[x(a^2 + b^2) + yab \right]$$

$$\Rightarrow (1+1)^5 - 1^5 - 1^5 = 1 \cdot 1 \cdot (1+1) \left[x(1^2 + 1^2) + y \cdot 1 \cdot 1 \right]$$

$$\Rightarrow 2^5 - 1 - 1 = 2 \cdot [2x + y] \Rightarrow 32 - 2 = 2(2x + y) \Rightarrow 2(2x + y) = 30$$

$$\therefore 2x + y = 15.$$

Para $a = 1$ e $b = 2$, temos:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a+b) \left[x(a^2 + b^2) + yab \right]$$

$$\Rightarrow (1+2)^5 - 1^5 - 2^5 = 1 \cdot 2 \cdot (1+2) \left[x(1^2 + 2^2) + y \cdot 1 \cdot 2 \right]$$

$$\Rightarrow 3^5 - 1 - 32 = 2 \cdot 3 \cdot [5x + 2y] \Rightarrow 243 - 33 = 6(5x + 2y)$$

$$\Rightarrow 6(5x + 2y) = 210 \therefore 5x + 2y = 35.$$

Resolvendo, encontramos $x = 5$ e $y = 5$. Logo, temos:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a+b) \left[x(a^2 + b^2) + y \cdot ab \right]$$

$$\Rightarrow (a+b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a+b) \left[5(a^2 + b^2) + 5ab \right]$$

$$\therefore (a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2).$$

Questão 7.2 (CN-1995-Modificada) - Resposta: Alternativa C.

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é simétrico.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $a = -b$, ou seja, $a + b$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P6, $a + c$ e $b + c$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 3 e o produto dos fatores também é do 3º grau, podemos escrever:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = x \cdot (a+b)(a+c)(b+c).$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, temos:

$$(0+1+2)^3 - 0^3 - 1^3 - 2^3 = x \cdot (0+1)(0+2)(1+2) \\ \Rightarrow 3^3 - 1 - 8 = x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 6x = 27 - 9 \Rightarrow 6x = 18 \therefore x = 3.$$

$$\text{Logo } (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c).$$

Comparando com o que foi dado no enunciado, temos:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c) \\ (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = k(a+b)[c^2 + (a+b)c + ab] \\ k(a+b)[c^2 + (a+b)c + ab] = 3(a+b)(a+c)(b+c) \\ \Rightarrow k[c^2 + ac + bc + ab] = 3(a+c)(b+c) \\ \Rightarrow k[c(c+a) + b(c+a)] = 3(a+c)(b+c) \\ \Rightarrow k(c+a)(c+b) = 3(a+c)(b+c) \therefore \boxed{k=3}.$$

Questão 7.3 (Rússia)

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $a = b$, ou seja, $a - b$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P6, $a - c$ e $b - c$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 3 e o produto dos fatores também é do 3º grau, podemos escrever:

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) = x \cdot (a-b)(a-c)(b-c).$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, temos:

$$0^2(2-1) + 1^2(0-2) + 2^2(1-0) = x \cdot (0-1)(0-2)(1-2) \\ \Rightarrow -2 + 4 = x \cdot (-1)(-2)(-1) \Rightarrow 2 = -2 \therefore \boxed{x=-1}.$$

Logo:

$$\begin{aligned}a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) &= x \cdot (a-b)(a-c)(b-c) \\ \Rightarrow a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) &= (-1) \cdot (a-b)(a-c)(b-c) . \\ \therefore a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) &= (a-b)(c-a)(b-c)\end{aligned}$$

Note que esse produto acima é inteiro, pois a , b e c são reais e distintos dois a dois.

Questão 7.11

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $a = b$, ou seja, $a - b$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P6, $a - c$ e $b - c$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 3 e o produto dos fatores é do 4º grau, podemos escrever:

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c) \cdot [k(a+b+c)].$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, temos:

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c) \cdot [k(a+b+c)].$$

$$0^3(1-2) + 1^3(2-0) + 2^3(0-1) = (0-1)(0-2)(1-2) \cdot [k(0+1+2)]$$

$$0 + 2 - 8 = (-2) \cdot (3k) \Rightarrow -6 = -k \therefore \boxed{k=1}.$$

Logo, temos:

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c) \cdot [k(a+b+c)]$$

$$\therefore \boxed{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)}.$$

Questão 7.14

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $a = b$, ou seja, $a - b$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P5, $a - c$ e $b - c$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 4 e o produto dos fatores é do 3º grau, podemos escrever:

$$a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = x \cdot (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, temos:

$$\begin{aligned} a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 &= x \cdot (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c) \\ \Rightarrow 0 \cdot (1-2)^3 + 1 \cdot (2-0)^3 + 2 \cdot (0-1)^3 &= x \cdot (0-1)(0-2)(1-2)(0+1+2) \\ \Rightarrow 1 \cdot 2^3 + 2 \cdot (-1)^3 &= x \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 3 \Rightarrow -6x = 8-2 \therefore \boxed{x=1}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

Questão 7.16

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $a = b$, ou seja, $a - b$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P5, $a - c$ e $b - c$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 5 e o produto dos fatores é do 3º grau, podemos escrever:

$$a^2(b-c)^3 + b^2(c-a)^3 + c^2(a-b)^3 = (a-b)(a-c)(b-c) \cdot \left[m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ac) \right]$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, temos:

$$\begin{aligned} 0^2(1-2)^3 + 1^2(2-0)^3 + 2^2(0-1)^3 &= (0-1)(0-2)(1-2) \cdot \left[m(0^2 + 1^2 + 2^2) + n(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2) \right] \\ \Rightarrow 1 \cdot 2^3 + 4 \cdot (-1)^3 &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot [m(1+4) + n(1 \cdot 2)] \\ \Rightarrow (-2)(5m + 2n) &= 8 - 4 \therefore \boxed{5m + 2n = -2}. \end{aligned}$$

Para $a = 0$, $b = -1$ e $c = 2$, temos:

$$\begin{aligned} 0^2(-1-2)^3 + (-1)^2(2-0)^3 + 2^2(0-(-1))^3 &= (0-(-1))(0-2)(-1-2) \cdot \\ &\cdot [m(0^2 + (-1)^2 + 2^2) + n(0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2)] \\ \Rightarrow 1 \cdot 2^3 + 4 \cdot 1^3 &= 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot [m(1+4) + n(-1 \cdot 2)] \Rightarrow 6(5m - 2n) = 8 + 4 \\ \therefore \boxed{5m - 2n = 2}. \end{aligned}$$

Passo 06: Resolvendo o sistema encontramos $m = 0$ e $n = -1$.

Logo $a^2(b-c)^3 + b^2(c-a)^3 + c^2(a-b)^3 = (a-b)(c-a)(b-c)(ab+bc+ac)$.

Questão 7.20

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é simétrico.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $a = -b$, ou seja, $a + b$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P6, $a + c$ e $b + c$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 5 e o produto dos fatores é do 3º grau, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 &= \\ &= (a+b)(a+c)(b+c) \left[x(a^2 + b^2 + c^2) + y(ab + bc + ca) \right] \end{aligned}$$

Passo 05: Damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, temos:

$$\begin{aligned} (0+1+2)^5 - 0^5 - 1^5 - 2^5 &= \\ &= (0+1)(0+2)(1+2) \left[x(0^2 + 1^2 + 2^2) + y(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0) \right] \\ \Rightarrow 243 - 1 - 32 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 [5x + 2y] \Rightarrow 6(5x + 2y) = 210 \\ \therefore 5x + 2y &= 35 \quad (\text{eq1}). \end{aligned}$$

Para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$, temos:

$$\begin{aligned} (0+1+1)^5 - 0^5 - 1^5 - 1^5 &= \\ &= (0+1)(0+1)(1+1) \left[x(0^2 + 1^2 + 1^2) + y(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \right] \\ \Rightarrow 32 - 1 - 1 &= 2 \cdot 1 \cdot 1 [2x + y] \Rightarrow 2(2x + y) = 30 \\ \therefore 2x + y &= 15 \quad (\text{eq2}). \end{aligned}$$

Passo 06: Resolvendo o sistema, encontramos: $x = 5$ e $y = 5$.

$$\begin{aligned}\text{Logo: } (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 &= \\ &= (a+b)(a+c)(b+c) \left[5(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca) \right].\end{aligned}$$

Observação: Podemos escrever essa fatoração da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 &= \\ &= \frac{5}{2}(a+b)(a+c)(b+c) \left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \right]\end{aligned}$$

Questão 7.21 (União Soviética-1962)

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Note que o polinômio é alternado.

Passo 02: Veja que o polinômio se anula para $x = y$, ou seja, $x - y$ é fator.

Passo 03: Pela propriedade P5, $z - x$ e $y - z$ também são fatores.

Passo 04: Como o grau do polinômio é 5 e o produto dos fatores é do 3º grau, podemos escrever:

$$\begin{aligned}(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 &= (x-y)(y-z)(z-x) \cdot \\ &\quad \cdot \left[m(x^2 + y^2 + z^2) + n(xy + yz + zx) \right]\end{aligned}$$

Passo 05: Por fim, damos valores ao polinômio parcialmente fatorado para encontrar o coeficiente que falta.

Para $x = 0$, $y = 1$ e $z = 2$, temos:

$$\begin{aligned}(0-1)^5 + (1-2)^5 + (2-0)^5 &= (0-1)(1-2)(2-0) \cdot \\ &\quad \cdot \left[m(0^2 + 1^2 + 2^2) + n(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2) \right] \\ \Rightarrow (-1)^5 + (-1)^5 + 2^5 &= (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \left[m(1+4) + n(1 \cdot 2) \right] \\ \Rightarrow 2(5m+2n) &= -1-1+32 \quad \therefore \boxed{5m+2n=15}.\end{aligned}$$

Para $x = 0$, $y = -1$ e $z = 2$, temos:

$$\begin{aligned}(0-(-1))^5 + (-1-2)^5 + (2-0)^5 &= (0-(-1))(-1-2)(2-0) \cdot \\ &\quad \cdot \left[m(0^2 + (-1)^2 + 2^2) + n(0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2) \right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1^5 + (-3)^5 + 2^5 = 1 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot [m(1+4) + n(-1 \cdot 2)]$$

$$\Rightarrow -6(5m - 2n) = 1 - 245 + 32 \quad \therefore \boxed{5m - 2n = 35}.$$

Passo 06: Resolvendo o sistema encontramos $m = 5$ e $n = -5$.

$$\text{Logo } (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = 5(x-y)(y-z)(z-x) \cdot \\ \cdot \left[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) \right].$$

Como $5(x-y)(y-z)(z-x)$ é fator, concluímos que

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \text{ é divisível por } 5(x-y)(y-z)(z-x).$$

Como queríamos provar.

Questão 7.24

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$y + z - x = a; \quad z + x - y = b; \quad x + y - z = c; \quad \Rightarrow \quad x + y + z = a + b + c.$$

$$E = (x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3 - (x + y - z)^3$$

$$\Rightarrow E = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3.$$

Passo 02: Note que o polinômio simétrico foi fatorado na questão 7.2, usemos o seu resultado:

$$a + b = (y + z - x) + (z + x - y) \Rightarrow a + b = 2z.$$

$$b + c = (z + x - y) + (x + y - z) \Rightarrow b + c = 2x.$$

$$a + c = (y + z - x) + (x + y - z) \Rightarrow a + c = 2y.$$

$$E = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \Rightarrow E = 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

$$\Rightarrow E = 3 \cdot (2z) \cdot (2y) \cdot (2x) \quad \therefore \boxed{E = 24xyz}.$$

Questão 7.25

Resolução: Vamos fatorar passo a passo:

Passo 01: Fazendo uma mudança de variável, temos:

$$y+z-x=a; z+x-y=b; x+y-z=c; \Rightarrow x+y+z=a+b+c.$$

$$E = (x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 - (x+y-z)^5$$

$$\Rightarrow E = (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5.$$

Passo 02: Note que o polinômio simétrico foi fatorado na questão 7.20, usemos o resultado da observação:

$$a+b = (y+z-x) + (z+x-y) \Rightarrow a+b = 2z.$$

$$b+c = (z+x-y) + (x+y-z) \Rightarrow b+c = 2x.$$

$$a+c = (y+z-x) + (x+y-z) \Rightarrow a+c = 2y.$$

$$E = (x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 - (x+y-z)^5$$

$$\Rightarrow E = \frac{5}{2}(a+b)(a+c)(b+c) \left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \right]$$

$$\Rightarrow E = \frac{5}{2}(2z)(2y)(2x) \left[(2z)^2 + (2x)^2 + (2y)^2 \right]$$

$$\Rightarrow E = 20xyz \left[4x^2 + 4y^2 + 4z^2 \right] \Rightarrow E = 20xyz \cdot 4 \left[x^2 + y^2 + z^2 \right]$$

$$\therefore E = 80xyz(x^2 + y^2 + z^2).$$

Capítulo 08 – Somas de Newton

Questão 8.7

Resolução: Sejam a, b e c as raízes da equação

$$x^3 - \sigma_1 \cdot x^2 + \sigma_2 \cdot x - \sigma_3 = 0, \text{ então podemos escrever:}$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow \boxed{S_1 = \sigma_1 = 0}, S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 3 \Rightarrow \boxed{S_0 = 3}.$$

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \Rightarrow S_2 = (0)^2 - 2\sigma_2 \Rightarrow \boxed{S_2 = -2\sigma_2}.$$

Da notação generalizada, temos:

$$S_3 = \sigma_1 \cdot S_{3-1} - \sigma_2 \cdot S_{3-2} + \sigma_3 \cdot S_{3-3} \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_3 = 0 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot 0 + \sigma_3 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{S_3 = 3\sigma_3} \therefore \boxed{S_3 = 3abc}.$$

Questão 8.8

Resolução: Aproveitando a resolução anterior e da notação generalizada, podemos escrever:

$$S_3 = \sigma_1 \cdot S_{3-1} - \sigma_2 \cdot S_{3-2} + \sigma_3 \cdot S_{3-3} \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_3 = 0 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot 0 + \sigma_3 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{S_3 = 3\sigma_3}$$

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} \Rightarrow S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 + \sigma_3 \cdot S_1$$

$$\Rightarrow S_4 = 0 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot (-2\sigma_2) + \sigma_3 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{S_4 = 2\sigma_2^2}$$

$$\therefore \boxed{S_4 = 2(ab + bc + ca)^2}.$$

Questão 8.9

Resolução: Do raciocínio da resolução anterior, podemos escrever:

$$S_2 = -2\sigma_2 \therefore \boxed{\sigma_2 = -\frac{S_2}{2}}.$$

Da notação generalizada, temos:

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} \Rightarrow S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 + \sigma_3 \cdot S_1$$

$$\Rightarrow S_4 = 0 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot (-2\sigma_2) + \sigma_3 \cdot 0 \Rightarrow S_4 = 2\sigma_2^2 \Rightarrow S_4 = 2 \cdot \left(-\frac{S_2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_4 = 2 \cdot \frac{S_2^2}{4} \Rightarrow S_4 = \frac{S_2^2}{2} \therefore \boxed{S_4 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}}.$$

Questão 8.10

Resolução: Da notação generalizada, temos:

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} \Rightarrow S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 + \sigma_3 \cdot S_1$$

$$\Rightarrow S_4 = 0 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot (-2\sigma_2) + \sigma_3 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{S_4 = 2\sigma_2^2}.$$

$$S_5 = \sigma_1 \cdot S_{5-1} - \sigma_2 \cdot S_{5-2} + \sigma_3 \cdot S_{5-3} \Rightarrow S_5 = \sigma_1 \cdot S_4 - \sigma_2 \cdot S_3 + \sigma_3 \cdot S_2$$

$$\Rightarrow S_5 = 0 \cdot S_4 - \sigma_2 \cdot (3\sigma_3) + \sigma_3 \cdot (-2\sigma_2) \Rightarrow \boxed{S_5 = -5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}$$

$$\therefore \boxed{S_5 = -5abc(ab + bc + ca)}.$$

Questão 8.12

Resolução: Aproveitando o resultado da questão 8.10, temos:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{3abc(ac + bc + ab)} = \frac{-5abc(ab + bc + ca)}{3abc(ac + bc + ab)} \therefore \frac{a^5 + b^5 + c^5}{3abc(ac + bc + ab)} = -\frac{5}{3}.$$

Questão 8.13

Resolução: Dos resultados anteriores, podemos escrever:

$$S_2 = -2\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = -\frac{S_2}{2}, \quad S_3 = 3\sigma_3 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{S_3}{3}$$

$$S_5 = -5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \Rightarrow S_5 = -5 \cdot \left(-\frac{S_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{S_3}{3}\right) \Rightarrow \frac{S_5}{5} = \frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_3}{3}$$

$$\therefore \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3}$$

Questão 8.15

Resolução: Dos resultados anteriores, podemos escrever:

$$S_2 = -2\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = -\frac{S_2}{2}, \quad S_3 = 3\sigma_3 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{S_3}{3} \Rightarrow \sigma_3^2 = \left(\frac{S_3}{3}\right)^2$$

$$S_4 = 2\sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{S_4}{2}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} S_5 &= -5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \Rightarrow S_5^2 = (-5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3)^2 \Rightarrow S_5^2 = 25 \cdot \sigma_2^2 \cdot \sigma_3^2 \\ &\Rightarrow \frac{S_5^2}{25} = \left(\frac{S_4}{2}\right) \cdot \left(\frac{S_3}{3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{S_5}{5}\right)^2 = \left(\frac{S_4}{2}\right) \cdot \left(\frac{S_3}{3}\right)^2 \\ &\therefore \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2 = \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right) \end{aligned}$$

Questão 8.16

Resolução: Podemos escrever:

$$S_6 = \sigma_1 \cdot S_{6-1} - \sigma_2 \cdot S_{6-2} + \sigma_3 \cdot S_{6-3} \Rightarrow S_6 = \sigma_1 \cdot S_5 - \sigma_2 \cdot S_4 + \sigma_3 \cdot S_3$$

$$\Rightarrow S_6 = 0 \cdot S_5 - \sigma_2 \cdot (2\sigma_2^2) + \sigma_3 \cdot (3\sigma_3) \Rightarrow S_6 = 3\sigma_3^2 - 2\sigma_2^3$$

$$\therefore S_6 = 3a^2b^2c^2 - 2(ab + bc + ca)^3$$

Questão 8.17

Resolução: Aproveitando a resolução anterior, podemos escrever:

$$S_6 = 3\sigma_3^2 - 2\sigma_2^3 \Rightarrow S_6 = 3 \cdot \left(\frac{S_3}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{S_2}{2}\right)^3 \Rightarrow S_6 = 3 \cdot \left(\frac{S_3^2}{9}\right) - 2 \cdot \left(\frac{S_2^3}{8}\right)$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{S_3^2}{3} - \frac{S_2^3}{4} \therefore S_6 = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2}{3} - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{4}.$$

Questão 8.18

Resolução: Podemos escrever:

$$S_7 = \sigma_1 \cdot S_{7-1} - \sigma_2 \cdot S_{7-2} + \sigma_3 \cdot S_{7-3} \Rightarrow S_7 = \sigma_1 \cdot S_6 - \sigma_2 \cdot S_5 + \sigma_3 \cdot S_4 \Rightarrow$$

$$S_7 = 0 \cdot S_6 - \sigma_2 \cdot (-5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3) + \sigma_3 \cdot (2\sigma_2^2) \Rightarrow S_7 = 5 \cdot \sigma_2^2 \cdot \sigma_3 + 2\sigma_2^2 \cdot \sigma_3$$

$$\Rightarrow \boxed{S_7 = 7 \cdot \sigma_2^2 \cdot \sigma_3} \therefore \boxed{S_7 = 7abc(ab + bc + ca)^2}.$$

Questão 8.19 (Croácia 2001)

Observação: Temos abaixo a segunda resolução desta questão, a primeira resolução está no capítulo 5, cuja resolução é por produtos notáveis.

Resolução: Da notação generalizada, temos:

$$S_3 = \sigma_1 \cdot S_{3-1} - \sigma_2 \cdot S_{3-2} + \sigma_3 \cdot S_{3-3} \Rightarrow S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_3 = 0 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot 0 + \sigma_3 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{S_3 = 3\sigma_3}.$$

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} \Rightarrow S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 + \sigma_3 \cdot S_1$$

$$\Rightarrow S_4 = 0 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot (-2\sigma_2) + \sigma_3 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{S_4 = 2\sigma_2^2} \therefore \boxed{S_4 = 2(ab + bc + ca)^2}.$$

Também podemos escrever:

$$S_7 = \sigma_1 \cdot S_{7-1} - \sigma_2 \cdot S_{7-2} + \sigma_3 \cdot S_{7-3} \Rightarrow S_7 = \sigma_1 \cdot S_6 - \sigma_2 \cdot S_5 + \sigma_3 \cdot S_4$$

$$\Rightarrow S_7 = 0 \cdot S_6 - \sigma_2 \cdot (-5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3) + \sigma_3 \cdot S_4$$

$$\Rightarrow S_7 = 5 \cdot \sigma_2^2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot S_4 \Rightarrow S_7 = 5 \cdot \left(\frac{S_4}{2}\right) \cdot \sigma_3 + \frac{2}{2} \cdot \sigma_3 \cdot S_4$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{7}{2} \cdot \sigma_3 \cdot S_4 \Rightarrow \frac{S_7}{\sigma_3 \cdot S_4} = \frac{7}{2} \therefore \frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc(a^4 + b^4 + c^4)} = \frac{7}{2}.$$

Questão 8.27

Resolução: Podemos escrever:

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \quad \therefore \boxed{S_2 = -2\sigma_2}$$

$$\sigma_1^3 = S_3 + 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 - 3\sigma_3 \quad \therefore \boxed{S_3 = 3\sigma_3}$$

Questão 8.28

Resolução: Sendo a, b, c e d as raízes da equação genérica

$x^4 = \sigma_1 \cdot x^3 - \sigma_2 \cdot x^2 + \sigma_3 \cdot x - \sigma_4$, podemos escrever:

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \quad \therefore \boxed{S_2 = -2\sigma_2}$$

$$\sigma_1^3 = S_3 + 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 - 3\sigma_3 \quad \therefore \boxed{S_3 = 3\sigma_3}$$

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} - \sigma_4 \cdot S_{4-4}$$

$$\Rightarrow S_4 = \underset{0}{\sigma_1 \cdot S_3} - \underset{0}{\sigma_2 \cdot S_2} + \sigma_3 \cdot S_1 - \sigma_4 \cdot S_0 \Rightarrow S_4 = -\sigma_2 \cdot S_2 - \sigma_4 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_4 = -\sigma_2 \cdot (-2\sigma_2) - \sigma_4 \cdot 4 \quad \therefore \boxed{S_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4}$$

Questão 8.29

Resolução: Sendo a, b, c e d as raízes da equação genérica

$x^4 = \sigma_1 \cdot x^3 - \sigma_2 \cdot x^2 + \sigma_3 \cdot x - \sigma_4$, podemos escrever:

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \Rightarrow S_2 = -2\sigma_2 \quad \therefore \boxed{\sigma_2 = -\frac{S_2}{2}}$$

$$\sigma_1^3 = S_3 + 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 - 3\sigma_3 \Rightarrow S_3 = 3\sigma_3 \quad \therefore \boxed{\sigma_3 = \frac{S_3}{3}}$$

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} - \sigma_4 \cdot S_{4-4}$$

$$\Rightarrow S_4 = \underset{0}{\sigma_1 \cdot S_3} - \underset{0}{\sigma_2 \cdot S_2} + \sigma_3 \cdot S_1 - \sigma_4 \cdot S_0 \Rightarrow S_4 = -\sigma_2 \cdot S_2 - \sigma_4 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_4 = -\left(-\frac{S_2}{2}\right) \cdot S_2 - \sigma_4 \cdot 4 \quad \therefore \boxed{S_4 = \frac{S_2^2}{2} - 4\sigma_4}$$

Questão 8.30

Resolução: Sendo a, b, c e d as raízes da equação genérica

$x^4 = \sigma_1 \cdot x^3 - \sigma_2 \cdot x^2 + \sigma_3 \cdot x - \sigma_4$, podemos escrever:

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \quad \therefore \boxed{S_2 = -2\sigma_2}.$$

$$\sigma_1^3 = S_3 + 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 - 3\sigma_3 \quad \therefore \boxed{S_3 = 3\sigma_3}.$$

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} - \sigma_4 \cdot S_{4-4}$$

$$\Rightarrow S_4 = \underbrace{\sigma_1 \cdot S_3}_0 - \sigma_2 \cdot \underbrace{S_2}_0 + \sigma_3 \cdot \underbrace{S_1}_0 - \sigma_4 \cdot S_0 \Rightarrow S_4 = -\sigma_2 \cdot S_2 - \sigma_4 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_4 = -\sigma_2 \cdot (-2\sigma_2) - \sigma_4 \cdot 4 \quad \therefore \boxed{S_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4}.$$

$$S_5 = \sigma_1 \cdot S_{5-1} - \sigma_2 \cdot S_{5-2} + \sigma_3 \cdot S_{5-3} - \sigma_4 \cdot S_{5-4}$$

$$\Rightarrow S_5 = \underbrace{\sigma_1 \cdot S_4}_0 - \sigma_2 \cdot S_3 + \sigma_3 \cdot S_2 - \sigma_4 \cdot \underbrace{S_1}_0 \Rightarrow S_5 = -\sigma_2 \cdot S_3 + \sigma_3 \cdot S_2$$

$$\Rightarrow S_5 = -\sigma_2 \cdot (3\sigma_3) - \sigma_3 \cdot (-2\sigma_2) \quad \therefore \boxed{S_5 = -5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}$$

Questão 8.31

Resolução: Sendo a, b, c e d as raízes da equação genérica

$x^4 = \sigma_1 \cdot x^3 - \sigma_2 \cdot x^2 + \sigma_3 \cdot x - \sigma_4$, podemos escrever:

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \quad \therefore \boxed{S_2 = -2\sigma_2}.$$

$$\sigma_1^3 = S_3 + 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 - 3\sigma_3 \quad \therefore \boxed{S_3 = 3\sigma_3}.$$

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_{4-1} - \sigma_2 \cdot S_{4-2} + \sigma_3 \cdot S_{4-3} - \sigma_4 \cdot S_{4-4}$$

$$\Rightarrow S_4 = \underbrace{\sigma_1 \cdot S_3}_0 - \sigma_2 \cdot \underbrace{S_2}_0 + \sigma_3 \cdot \underbrace{S_1}_0 - \sigma_4 \cdot S_0 \Rightarrow S_4 = -\sigma_2 \cdot S_2 - \sigma_4 \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_4 = -\sigma_2 \cdot (-2\sigma_2) - \sigma_4 \cdot 4 \quad \therefore \boxed{S_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4}.$$

$$S_5 = \sigma_1 \cdot S_{5-1} - \sigma_2 \cdot S_{5-2} + \sigma_3 \cdot S_{5-3} - \sigma_4 \cdot S_{5-4}$$

$$\Rightarrow S_5 = \underbrace{\sigma_1 \cdot S_4}_0 - \sigma_2 \cdot S_3 + \sigma_3 \cdot S_2 - \sigma_4 \cdot \underbrace{S_1}_0 \Rightarrow S_5 = -\sigma_2 \cdot S_3 + \sigma_3 \cdot S_2$$

$$\Rightarrow S_5 = -\sigma_2 \cdot (3\sigma_3) - \sigma_3 \cdot (-2\sigma_2) \Rightarrow S_5 = -5 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

$$\Rightarrow S_5 = -5 \cdot \left(-\frac{S_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{S_3}{3}\right) \quad \therefore \boxed{\frac{S_5}{5} = \frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_3}{3}}.$$

Questão 35

Resolução: Sendo x e y as raízes de um polinômio quadrático genérico, então, da expressão geral, é imediato que:

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \quad \therefore x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

Questão 36

Resolução: Sendo x e y as raízes de um polinômio quadrático genérico, então, da expressão geral, temos que:

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \Rightarrow S_2 = -2\sigma_2 \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = -\frac{S_2}{2}}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_n = -\sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_n = -\left(-\frac{S_2}{2}\right) \cdot S_{n-2}$$

$$\Rightarrow 2S_n = S_2 \cdot S_{n-2} \quad \therefore 2x^n + 2y^n = (x^2 + y^2)(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

Questão 8.37

Resolução: Sendo x e y as raízes de um polinômio quadrático genérico, podemos escrever:

$$x^2 = \sigma_1 \cdot x - \sigma_2 \Rightarrow (x^2)^2 = (\sigma_1 \cdot x - \sigma_2)^2 \Rightarrow x^4 = \sigma_1^2 \cdot x^2 - 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot x + \sigma_2^2$$

$$\Rightarrow x^4 = (x+y)^2 \cdot x^2 - 2(x+y) \cdot (xy) \cdot x + (xy)^2$$

$$\Rightarrow x^4 = (x^2 + 2xy + y^2) \cdot x^2 - 2(x+y) \cdot x^2y + x^2y^2 \Rightarrow$$

$$x^4 = (x^2 + y^2) \cdot x^2 + 2x^3y - 2x^2y^2 + x^2y^2 \Rightarrow x^4 = (x^2 + y^2) \cdot x^2 - x^2y^2$$

$$\Rightarrow x^4 \cdot x^{2n-3} = (x^2 + y^2) \cdot x^2 \cdot x^{2n-3} - x^2y^2 \cdot x^{2n-3}$$

$$\therefore x^{2n+1} = (x^2 + y^2) \cdot x^{2n-1} - x^2y^2 \cdot x^{2n-3} \quad (\text{eq1})$$

Fazendo o mesmo para o y , temos:

$$y^2 = \sigma_1 \cdot y - \sigma_2 \Rightarrow (y^2)^2 = (\sigma_1 \cdot y - \sigma_2)^2 \Rightarrow y^4 = \sigma_1^2 \cdot y^2 - 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot y + \sigma_2^2$$

$$\Rightarrow y^4 = (x+y)^2 \cdot y^2 - 2(x+y) \cdot (xy) \cdot y + (xy)^2$$

$$\Rightarrow y^4 = (x^2 + 2xy + y^2) \cdot y^2 - 2(x+y) \cdot xy^2 + (xy)^2 \Rightarrow$$

$$y^4 = (x^2 + y^2) \cdot y^2 + 2xy^3 - 2x^2y^2 - 2xy^3 + x^2y^2 \Rightarrow y^4 = (x^2 + y^2) \cdot y^2 - x^2y^2$$

$$\Rightarrow y^4 \cdot y^{2n-3} = (x^2 + y^2) \cdot y^2 \cdot y^{2n-3} - x^2 y^2 \cdot y^{2n-3}$$

$$\therefore y^{2n+1} = (x^2 + y^2) \cdot y^{2n-1} - x^2 y^2 \cdot y^{2n-3} \quad (\text{eq2})$$

Fazendo (eq1) - (eq2):

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x^2 + y^2) \cdot x^{2n-1} - x^2 y^2 \cdot x^{2n-3} - (x^2 + y^2) \cdot y^{2n-1} + x^2 y^2 \cdot y^{2n-3}$$

$$\therefore x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x^2 + y^2)(x^{2n-1} - y^{2n-1}) - x^2 y^2 (x^{2n-3} - y^{2n-3}).$$

Questão 8.38 (Putnam 1959)

Resolução: Fazendo $y = \frac{1}{x}$, no resultado anterior, facilmente encontramos:

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x^2 + y^2)(x^{2n-1} - y^{2n-1}) - x^2 y^2 (x^{2n-3} - y^{2n-3}) \Rightarrow$$

$$x^{2n+1} - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} = \left[x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right] \left[x^{2n-1} - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1}\right] - x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 \left[x^{2n-3} - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-3}\right]$$

$$\therefore x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^{2n-1} - \frac{1}{x^{2n-1}}\right) - \left(x^{2n-3} - \frac{1}{x^{2n-3}}\right).$$

Questão 8.39

Resolução: Sendo x , y e z as raízes de um polinômio quadrático genérico, então, da expressão geral, é imediato que:

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$$

$$\therefore x^n + y^n + z^n = (x + y + z)(x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}) -$$

$$- (xy + xz + yz)(x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) + xyz(x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3}).$$

Questão 8.40

Resolução: Dos resultados anteriores, podemos escrever:

$$S_2 = -2\sigma_2 \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = -\frac{S_2}{2}}, \quad S_3 = 3\sigma_3 \Rightarrow \boxed{\sigma_3 = \frac{S_3}{3}}$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3} \Rightarrow S_n = -\sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$$

$$\Rightarrow S_n = -\left(-\frac{S_2}{2}\right) \cdot S_{n-2} + \frac{S_3}{3} \cdot S_{n-3} \therefore \boxed{S_n = \frac{S_2 \cdot S_{n-2}}{2} + \frac{S_3 \cdot S_{n-3}}{3}}$$

Questão 8.43 (CN-1988)

Resolução: Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, então, da expressão geral, temos que:

$$\sigma_1 = -\frac{(-2)}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 2}; \sigma_2 = \frac{m}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = m}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \Rightarrow S_n = 2 \cdot b - m \cdot a \therefore \boxed{x_1^n + x_2^n = 2b - ma}.$$

Questão 8.45 (IMO-Longlist-1988 / AHSME-1975)

Resolução: Sendo p , q e r as raízes da equação, então, da expressão geral, temos que:

$$\sigma_1 = -\frac{(-1)}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 1}; \sigma_2 = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = 1}; \sigma_3 = -\frac{(-2)}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_3 = 2}.$$

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \Rightarrow 1^2 = S_2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow S_2 = 1 - 2 \Rightarrow \boxed{S_2 = -1}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3} \Rightarrow S_3 = 1 \cdot S_{3-1} - 1 \cdot S_{3-2} + 2 \cdot S_{3-3} \\ \Rightarrow S_3 = S_2 - S_1 + 2 \cdot S_0 \Rightarrow S_3 = -1 - 1 + 2 \cdot 3 \therefore \boxed{S_3 = 4}.$$

Questão 8.46 (Putnam-1939-Modificada)

Resolução: Sendo α , β e γ as raízes da equação, então, da expressão geral, temos que:

$$\sigma_1 = -\frac{a}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -a}; \sigma_2 = \frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = b}; \sigma_3 = -\frac{c}{1} \Rightarrow \boxed{\sigma_3 = -c}.$$

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \Rightarrow (-a)^2 = S_2 + 2 \cdot b \therefore \boxed{S_2 = a^2 - 2b}.$$

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3} \Rightarrow S_3 = (-a) \cdot S_{3-1} - b \cdot S_{3-2} + (-c) \cdot S_{3-3}$$

$$\Rightarrow S_3 = (-a) \cdot S_2 - b \cdot S_1 - c \cdot S_0 \Rightarrow S_3 = (-a) \cdot (a^2 - 2b) - b \cdot (-a) - c \cdot 3$$

$$\Rightarrow S_3 = -a^2 + 2ab + ab - 3c \therefore \boxed{S_3 = -a^2 + 3ab - 3c}.$$

Questão 46 (Singapura-2014)

Resolução: Sendo α e β as raízes da equação, então, da expressão geral, temos que:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{3}; \sigma_2 = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = -\frac{1}{3}}.$$

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = S_2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{9} = S_2 - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{1+6}{9} \therefore \boxed{S_2 = \frac{7}{9}}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{7}{9}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{21}{9} \therefore \boxed{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{7}{3}}$$

Questão 8.62

Resolução: Dos produtos notáveis, podemos escrever:

$$\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2 \Rightarrow 2^2 = 6 + 2\sigma_2 \Rightarrow 2\sigma_2 = -2 \therefore \boxed{\sigma_2 = -1}$$

$$\sigma_1^3 = S_3 + 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \Rightarrow 2^3 = 14 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 3\sigma_3 \therefore \boxed{\sigma_3 = 0}$$

Como $abc = 0$, temos que $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$ e como $ab + ac + bc = -1$
 $\Rightarrow \sigma_2 = -1$, apenas um deles é nulo.

Para $a = 0$, temos que $bc = -1$.

$$\sigma_1 = 2 \Rightarrow 0 + b + c = 2 \Rightarrow b + c = 2$$

$$S_2 = 6 \Rightarrow 0^2 + b^2 + c^2 = 6 \Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = 6}$$

$$S_p = |S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1}| \Rightarrow S_p = |(b^n + c^n)^2 - (b^{n-1} + c^{n-1}) \cdot (b^{n+1} + c^{n+1})|$$

$$\Rightarrow S_p = |b^{2n} + 2b^n c^n + c^{2n} - b^{2n} - b^{n-1} c^{n+1} - c^{n-1} b^{n+1} - c^{2n}|$$

$$\Rightarrow S_p = |b^{n-1} c^{n-1} (2bc - c^2 - b^2)| \Rightarrow S_p = |(bc)^{n-1} [2bc - (b^2 + c^2)]|$$

$$\Rightarrow S_p = |(-1)^{n-1} [2(-1) - (6)]| \Rightarrow S_p = |(-1)^{n-1} [-8]| \Rightarrow S_p = |(-1)^n \cdot 8|$$

$$\therefore \boxed{S_p = 8}$$

Bibliografia

- [1] ANDREESCU, Titu; Enesc, Bogdan. **Mathematical Olympiad Treasures**. Birkhauser. 2004
- [2] INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. **Álgebra**, Tomo I. Lumbreras. 2011
- [3] LIMA NETO, Sérgio. **A Matemática do Vestibular do IME**. Vestseller. 2011
- [4] LIMA NETO, Sérgio. **A Matemática do Vestibular do ITA**. Vestseller. 2013
- [5] LITVINENKO, V; MORDOKVITCH, A. **Solving Problems in Algebra and Trigonometry**. Mir Moscou 1987

No século XVIII, o matemático francês Jean Le Rond D'Alembert afirmou "A álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu". D'Alembert, que possui importantes descobertas na álgebra, como o Teorema Fundamental da Álgebra, não poderia ter sido mais feliz em sua célebre frase. A álgebra é o ferramenta mestra para o desenvolvimento de todas as ciências naturais. O que seria da física sem a álgebra? O que seria das outras áreas da matemática sem a álgebra?

De modo a auxiliar nesse aprofundamento, a obra "Os Segredos da Álgebra Para IME/ITA/OLIMPIADAS", do eminente autor Miller Dias De Araújo, é perfeita. Todos os tópicos da álgebra fundamental estão presentes, incluindo potenciação, radiciação, produtos notáveis e fatoração. Em cada capítulo, a teoria algébrica é apresentada de forma detalhada, seguida de muitos problemas resolvidos. Várias identidades algébricas são demonstradas, algumas pouco conhecidas. Certamente, a cereja do bolo são os exercícios propostos, em grande quantidade e de excelente qualidade, a maioria retirada de concursos militares e olimpíadas de matemática de todo o mundo. Você vai se deparar com exercícios do Colégio Naval, ITA, IME e também de olimpíadas de diversos países. Deve-se destacar a organização dos capítulos, nos quais os conceitos mais fundamentais são apresentados primeiro, para somente depois constarem os tópicos mais avançados, facilitando o entendimento do leitor. O último capítulo do livro é reservado para as soluções e dicas dos exercícios propostos.

A presente obra é um verdadeiro tesouro, indispensável para qualquer pessoa que deseja formar uma base sólida em álgebra. Recomendo ao leitor que resolva esse livro de capa a capa, na íntegra, sem saltar nada, prestando atenção nas nuances de cada passagem algébrica. Existe muita poesia, muita arte e magia nessa obra prima do Miller Dias. Parabéns ao grande mestre!

Marcelo Rufino de Oliveira

